الأساس في

الــريـاضــيــات

الجــزء 1

السادس العلمي الاحيائي

غيداء طارق الشمري

07901311457

2019



1 الاعداد المركبة

- الحاجة الى توسيع مجموعه الاعداد الحقيقية
- العمليات على مجموعه الاعداد المركبة
- مرافق العدد المركب
- الجذور التربيعية للعدد المركب
- حل المعادلة التربيعية في $\mathbb{C}$
- التمثيل الهندسي للعداد المركبة
- الصيغة القطبية للعدد المركب
- مـــبرهنة ديــموآفـــر

2 القطوع المخروطية

- الـقطـع المكافـيء
- الـقطـع الــنـاقـص
- الـقطـع الـزائـــد

3 التفاضل

- المشتقات ذات الرتب العليا
- المعدلات المرتبطة
- مبرهنتا رول والقيمة المتوسطة
- اختبار التزايد والتناقص للدالة بأستخدام المشتقة الأولى
- النهاية العظمى والصغرى المحلية
- تقعر وتحدب المنحنيات ونقط الانقلاب
- اختبار المشتقة الثانية لنقط النهايات العظمى والصغرى المحلية
- رسم المخطط البياني للدالة
- تطبيقات عملية على القيم العظمى اوالصغرى

الفصل الاول : الحاجة إلى توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية:

لقد درسنا في الصفوف السابقة حل المعادلة الخطية (Linear Equation) وعرفنا أنه يوجد حل واحد في مجموعة الأعداد الحقيقية لأية معادلة خطية.

وعند دراستنا للمعادلة التربيعية تبين أنه لنوع معين منها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية، ونوع آخر لا يوجد لها حل في هذه المجموعة، مثل المعادلات:

$(x^2+4x+5=0)$،$(x^2+1=0)$

وكما تعلمت ان المعادلات التربيعية التي يكون مميزها (b^2-4ac) عدداً سالباً لا يوجد لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

أن ظهور مثل هذه المعادلات في العديد من التطبيقات الفيزياوية والهندسية أدى إلى الحاجة إلى توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة أوسع منها هي مجموعة الأعداد المركبة والتي سوف تكون موضوع دراستنا في هذا الفصل.

إننا عندما نريد حل المعادلة $(x^2+1=0)$ أو $(x^2=-1)$ لا نجد عددا حقيقيا مربع يساوي(-1) لذلك نفترض وجود عدد يساوي $\sqrt{-1}$ وهو غير حقيقي نرمز له بالرمز (i) ويسمى الوحدة التخيلية (**Imaginary Unit**) وهو ليس من الأعداد التي تقرن مع العدد أو القياس.

إن العدد $(\boldsymbol{i})$ يحقق الخواص الجبرية للأعداد الحقيقية ما عدا خاصية الترتيب، ولهذا نستطيع حساب قوى $(\boldsymbol{i})$ كما في الأمثلة الآتية:

$$i^2=-1$$
$$i^3=i^2.i=(-1).i=-i$$
$$i^4=i^2.i^2=(-1)(-1)=1$$
$$i^5=i^2.i^3=(-1)(-i)=i$$
$$i^{27}=i^{26}.i=(i^2)^{13}.i=(-1)^{13}.i=-i$$
$$i^{81}=i^{80}.i=(i^2)^{40}.i=(-1)^{40}.i=i$$
$$i^{-7}=(i)^{-8}.i=(i^2)^{-4}.i=(-1)^{-4}.i=i$$
$$i^{-15}=i^{-16}.i=(i^2)^{-8}.i=(-1)^{-8}.i=i$$

∴ **بصورة عامة** $\boldsymbol{i^{4n+r}=i^r \quad ,n\epsilon N, \quad r=0,1,2,3}$

هذا يعني أنه عند رفع (i) لعدد صحيح موجب الناتج يكون أحد عناصر المجموعة $\{-i,i,-1,1\}$.

نقسم أس (i) على 4 والباقي هو الاس الجديد لـ (i) . أما اذا كان ناتج القسمة بدون باقي فيصبح $i^0=1$

$i^{25}=i$ $\quad [\frac{25}{4}=6\frac{1}{4}$ ← الباقي]

$i^{99}=i^3=-i$ $\quad [\frac{99}{4}=24\frac{3}{4}$ ← الباقي]

مثال أكتب ما يلي في أبسط صورة

$a)\ i^{16} \quad b)\ i^{58} \quad c)\ i^{93} \quad d)\ i^{-13}$

$a)\ i^{16}=i^0=1$ $\quad [\frac{16}{4}=4$ بدون باقي]

$b)\ i^{58}=i^2=-1$ $\quad [\frac{58}{4}=14\frac{2}{4}$ ← الباقي]

$c)\ i^{93}=i$ $\quad [\frac{93}{4}=23\frac{1}{4}$ ← الباقي]

$d)\ i^{-13} = \frac{1}{i^{13}}$ الاس السالب في البسط نضعه في المقام حتى يتحول الى اس موجب

$= \frac{1}{i}$ $[\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$ الباقي]

$= \frac{i^4}{i}$ $[i^4 = 1]$

$= i^3 = -i$ عند القسمة تطرح الاسس

طريقة أخرى $i^{-13} = i^{-14}.i = (i^2)^{-7}.i = (-1)^{-7}.i = -1.i = -i$

ملاحظة: يمكن كتابة الجذور لأي عدد حقيقي سالب بدلالة (i)

مثلاً (وذلك لأن $\sqrt{-1} = i$)

$\sqrt{-16} = \sqrt{16}.\sqrt{-1} = 4i$

$\sqrt{-25} = \sqrt{25}.\sqrt{-1} = 5i$

$\sqrt{-12} = \sqrt{12}.\sqrt{-1} = 2\sqrt{3}\,i$

$\sqrt{-15} = \sqrt{15}.\sqrt{-1} = \sqrt{15}\ i$

بصورة عامة $\sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}\,i \quad , \quad \forall a \geq 0$

الآن بعد أن تعرفنا على العدد التخيلي ماذا نسمي العدد $(a + bi)$ حيث a عدد حقيقي، b عدد حقيقي $i = \sqrt{-1}$

تعريف

يقال للعدد $c = a + bi$ حيث a, b عددان حقيقيان $i = \sqrt{-1}$ عدد مركّب (Complex number)، يسمى a جزؤه الحقيقي (Real Part) ويسمى b جزؤه التخيلي (Imaginary Part) . ويرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بالرمز ℂ

ويقال للصيغة a+bi الصيغة العادية أو الصيغة الجبرية للعدد المركب.

ملاحظة: أن أي عدد مركب $(c = a + bi)$ يمكن جعله مناظراً للزوج المرتب (a,b)

إذ أن b, a عددان حقيقيان، وبالعكس فالعدد الحقيقي a يمكن كتابته بالشكل $a + 0i$ أو $(a, 0)$ وإن العدد i (Imaginary Unit) حيث أن : $i \Leftrightarrow (0,1)$ او $i = 0 + 1i$

يقال للعدد $bi \Leftrightarrow (0, b)$ عدد تخيلي بحت (Pure Imaginary Number) ويقال للعدد $(a, 0) \Leftrightarrow a = a + 0i$ إنه عدد حقيقي بحت (Pure Real Number).

فالعدد $-2 + 3i$ عدد مركب جزؤه الحقيقي -2 وجزؤه التخيلي 3

والعدد -2 عدد مركب جزؤه الحقيقي -2 وجزؤه التخيلي 0.

أما العدد $-3i$ فهو عدد مركب، جزؤه الحقيقي 0 وجزؤه التخيلي -3

مثال **أكتب الأعداد الآتية على صورة $a + bi$**

(a) -5 (b) $\sqrt{-100}$ (c) $-1 - \sqrt{-3}$ (d) $\frac{1+\sqrt{-25}}{4}$

(a) $-5 = -5 + 0i$ لأن الجزء التخيلي مفقود نضع بدلاً عنه $0i$

(b) $\sqrt{-100} = \sqrt{100}.\sqrt{-1} = 10i = 0 + 10i$ لأن الجزء الحقيقي مفقود نضع بدلاً عنه 0

(c) $-1-\sqrt{-3} = -1-\sqrt{3}\sqrt{-1} = -1-\sqrt{3}\,i$

(d) $\frac{1+\sqrt{-25}}{4} = \frac{1+\sqrt{25}\sqrt{-1}}{4} = \frac{1+5i}{4} = \frac{1}{4}+\frac{5i}{4}$

∴ كل عدد حقيقي (a) يمكن كتابته بالشكل $a+0i$ أو $(a,0)$.

أي يمكن كتابته على صورة عدد مركب جزءه التخيلي = 0 فإن هذا يبين أن :

مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي مجموعة جزئية من الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ أي أن $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

تعريف

إذا كان $c_1 = a_1 + b_1 i \;, c_2 = a_2 + b_2 i$

فإن $c_1 = c_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \;, \; b_1 = b_2$

ملاحظة: يتساوى العددان المركبان إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان وبالعكس.

مثال

جد قيمة كل من y,x الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة في كل مما يأتي.

(a) $2x-1+2i = 1+(y+1)\,i$

الجزء الحقيقي من الطرف الأول = الجزء الحقيقي من الطرف الثاني

$2x-1=1 \Rightarrow 2x=1+1 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$

الجزء التخيلي من الطرف الأول= الجزء التخيلي من الطرف الثاني.

$2=y+1 \Rightarrow y=2-1 \Rightarrow y=1$

(b) $3x+4i = 2+8yi$

$3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$

$4=8y \Rightarrow y=\frac{1}{2}$

(C) $(2y+1)-(2x-1)i = -8+3i$

$2y+1=-8 \Rightarrow 2y=-8-1 \Rightarrow 2y=-9 \Rightarrow y=\frac{-9}{2}$

$-(2x-1)=3$ (نوزع السالب على داخل القوس)

$-2x+1=3$

$-2x=3-1 \Rightarrow -2x=2 \Rightarrow x=-1$

العمليات على مجموعة الاعداد المركبة

أولاً: عملية الجمع على مجموع الأعداد المركبة

تعريف

ليكن $c_1 = a_1 + b_1 i \,, c_2 = a_2 + b_2 i$ حيث $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ فإن $c_1 + c_2 = (a_1+a_2) + (b_1+b_2)i$

وكما نعلم أن $(a_1+a_2) \in \mathbb{R}, (b_1+b_2) \in \mathbb{R}$ لأن مجموعة الأعداد الحقيقية مغلقة تحت عملية الجمع.

$\therefore (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i \in \mathbb{C}$

أي ان مجموعة الاعداد المركبة مغلقة تحت عملية الجمع.

مثال جد مجموع العددين المركبين في كل مما يأتي:

a) $3+4\sqrt{2}i\ ,\ 5-2\sqrt{2}i$

$(3+4\sqrt{2}i)+(5-2\sqrt{2}i)$

(الحقيقي ∓ الحقيقي)+(الخيلي ∓ التخيلي)i

$=(3+5)+(4\sqrt{2}-2\sqrt{2})i$

$=8+2\sqrt{2}i$

b) $3, (2-5i)$

$\therefore (3+0i)+(2-5i)$

$(3+2)+(0-5)i$

$5-5i$

ملاحظة: العدد 3 يمكن كتابته بالشكل$3+0i$ وذلك لأن الجزء التخيلي مفقود

C) $(1-i)\ ,3i$

$\therefore (1-i)+(0+3i)$

$(1+0)+(-1+3)i$

$1+2i$

ملاحظة: العدد $3i$ يمكن كتابته بالشكل$0+3i$ وذلك لأن الجزء الحقيقي مفقود

خواص عملية الجمع على مجموعة الاعداد المركبة:

$\forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C}$

فإن :

*الخاصية الابدالية (Commutativity) $(1)\ C_1+C_2=C_2+C_1$

* الخاصية التجميعية (Associativity) $(2)\ C_1+(C_2+C_3)=(C_1+C_2)+\ C_3$

* النظير الجمعي (Additive Invepse) $(3) \forall\ c\in\mathbb{C}, c=a+bi\ ,\exists -c\in\mathbb{C}$

حيث $-C=-a-bi$ يسمى $(-C)$ النظير الجمعي للعدد المركب C.

*العنصر المحايد الجمعي Additive Identity يرمز له بالرمز e ويعرف $(4) e=0=0+0i\in\mathbb{C}$

مما سبق نستنتج ان (c , +) هي زمرة إبدالية (Commutative Group).

ملاحظة: إن طرح أي عدد مركب من آخر يساوي حاصل جمع العدد المركب الأول مع النظيرالجمعي للعدد المركب الثاني

مثال جد ناتج $(7-13i)-(9+4i)$

$=(7-13i)+(-9-4i)$

$=(7-9)+(-13-4)i$

$=-2-17i$

ملاحظة: تحويل عملية الطرح إلى جمع مع أخذ النظير الجمعي للعدد الثاني

مثال حل المعادلة $(2-4i)+x=-5+i$, حيث $x\in\mathbb{C}$

$x=(-5+i)-(2-4i)$

$x=(-5+i)+(-2+4i)$

$x=(-5-2)+(1+4)i$

$x=-7+5i$

ملاحظة: حل المعادلة معناها إيجاد قيمة x



ثانياً: عملية الضرب على الأعداد المركبة

لإيجاد عملية ضرب عددين مركبين نقوم بضربهما بصفتهما مقدارين جبريين ونعوض بدلاً من (i^2) العدد (-1) كما يأتي:

إذا كان $c_1 = a_1 + b_1 i$ و $c_2 = a_2 + b_2 i$ فإن :

$$\begin{aligned} c_1 . c_2 &= (a_1 + b_1 i).(a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= a_1 a_{2+} a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 (-1) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \end{aligned}$$

ملاحظة: إذا كان $K \in \mathbb{R}$ ، $C = a + bi$ فإن $kc = k(a + bi) = ka + kbi$

تعريف

ليكن $c_1 = a_1 + b_1 i$, $c_2 = a_2 + b_2 i$ حيث $c_1 , c_2 \in \mathbb{C}$ فإن:

$$c_1 . c_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

وكما تعلم : $(a_1 a_2 - b_1 b_2) \in \mathbb{R}$ وإن $(a_1 b_2 + a_2 b_1) \in \mathbb{R}$ لأن $\mathbb{R}$ مغلق تحت عملية الضرب.

لذلك $c_1 . c_2 \in \mathbb{C}$ أي أن مجموعة الأعداد المركبة مغلقة تحت عملية الضرب.

مثال جد ناتج كلاً مما يأتي:

$(a)\ (2 - 3i)(3 - 5i)$

$(2 - 3i)(3 - 5i)$ (عملية توزيع بين الاقواس)

$= 6 - 10i - 9i + 15i^2 = 6 - 10i - 9i - 15$ (لأن $i^2 = -1$)

$= (6 - 15) + (-10 - 9)i = -9 - 19i$ (نجمع الحقيقيان معاً والتخيليان معاً)

$(b)\ (3 + 4i)^2$

الطريقة الأولى: ضرب قوسين متشابهين

$(3 + 4i)\ (3 + 4i)$

$= 9 + 12i + 12i + 16i^2$ (عملية التوزيع)

$= 9 + 12i + 12i - 16$ $(i^2 = -1)$

$= (9 - 16) + (12 + 12)i = -7 + 24i$

الطريقة الثانية: مفكوك مربع حدانية

مفكوك مربع الحدانية = [مربع الحد الأول ∓ ضعف (الأول x الثاني)+ مربع الحد الثاني]

$(3 + 4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2$

$= 9 + 24i - 16$ $(i^2 = -1)$

$= (9 - 16) + 24i = -7 + 24i$

$c)\ i(1+i)$

$i\,(1+i)$ (بالتوزيع)

$= i + i^2 = i - 1$ $(i^2 = -1)$

$= -1 + i$

$d)\ \frac{-5}{2}(4+3i)$

$= \left(\frac{-5}{2}\right)(4) + \left(\frac{-5}{2}\right)(3i) = -10 - \frac{15}{2}i$ (عملية توزيع)

$e)\ (1+i)^2 + (1-i)^2$

الطريقة الأولى : تجزأة الاقواس

$= (1+i)(1+i) + (1-i)(1-i)$

$= (1+i+i+i^2) + (1-i-i+i^2)$

$= 1 + 2i - 1 + 1 - 2i - 1 = 0$ $(i^2 = -1)$

الطريقة الثانية : مربع حدانية

$= (1 + 2i + i^2) + (1 - 2i + i^2) = (1 + 2i - 1) + (1 - 2i - 1) = 2i - 2i = 0$

خواص عملية الضرب على مجموعة الأعداد المركبة

تتمتع عملية الضرب على الأعداد المركبة بالخواص الآتية:

1) $c_1 \times c_2 = c_2 \times c_1$ $\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$

2) $c_1 \times (c_2 \times c_3) = (c_1 \times c_2) \times c_3$ (الخاصية التجميعية)

3) $(1 + 0i) = 1$ (العنصر المحايد الضربي)

4) (النظير الضربي) $\forall C \neq 0 + 0i \ ,\ \exists \frac{1}{c} \in C$

$c \times \frac{1}{c} = 1 + 0i$

أي ان لكل عدد مركب cعدا الصفر يوجد له نظير ضربي $\frac{1}{c}$ ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة.

أي ان $(\mathbb{C} - (0 - 0i), x)$ زمرة البداية

أي انه $(\mathbb{C}, +, \times)$ حقل (يسمى حقل الأعداد المركبة).

مرافق العدد المركب:

تعريف

مرافق العدد المركب $C = a + bi$ هو العدد المركب $\bar{c} = a - bi$ ، $\forall a, b \in \mathbb{R}$

فمثلاً $3 + i$ هو مرافق العدد $3 - i$ وبالعكس.

i هو مرافق العدد $-i$ وبالعكس.

$5 - 4i$ هو مرافق العدد $5 + 4i$ وبالعكس.

7 هو مرافق العدد 7 وبالعكس.

ملاحظة مهمة: المرافق هو تغيير إشارة العدد التخيلي فقط.

أما النظير الجمعي فهو تغيير إشارة العدد الحقيقي والتخيلي



يتضح من تعريف المرافق انه يحقق الخواص الاتية

1) $\overline{c_1 \mp c_2} = \overline{c_1} \mp \overline{c_2}$
2) $\overline{c_1 . c_2} = \overline{c_1} . \overline{c_2}$
3) $\overline{\overline{c}} = c$
4) $\overline{c} = c$ (إذا كان $C \in \mathbb{R}$ أي انه عدد حقيقي)
5) $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$, $c_2 \neq 0$
6) $c_1 . \overline{c_1} = a^2 + b^2 \Leftarrow C_1 = a + bi$ إذا كان

مثال إذا كان $C_2 = 3 - 2i$, $C_1 = 1 + i$ تحقق من:

1) $\overline{C_1 \mp C_2} = \overline{C_1} \mp \overline{C_2}$

الطرف الأيسر : $\overline{C_1 + C_2} = [\overline{(1+i) + (3-2i)}] = [\overline{(1+3) + (1-2)i}$

$= \overline{(4-i)} = 4 + i$

الطرف الأيمن : $\overline{C_1} + \overline{C_2} = \overline{(1+i)} + \overline{(3-2i)} = (1-i) + (3+2i)$

$= (1+3) + (-1+2)i = 4 + i$

$\therefore \overline{C_1 + C_2} = \overline{C_1} + \overline{C_2}$

وبنفس الطريقة نستنتج أن $\overline{C_1 - C_2} = \overline{C_1} - \overline{C_2}$

2) $\overline{C_1 . C_2} = \overline{C_1} . \overline{C_2}$

الطرف الأيسر : $\overline{C_1 . C_2} = \overline{(1+i)(3-2i)}$

$= \overline{3 - 2i + 3i - 2i^2} = \overline{3 - 2i + 3i + 2}$ $(i^2 = -1)$

$= \overline{(3+2) + (-2+3)i} = \overline{5 + i} = 5 - i$

الطرف الأيمن : $\overline{c_1} . \overline{c_2} = \overline{(1+i)} . \overline{(3-2i)}$

$= (1-i)(3+2i) = 3 + 2i - 3i - 2i^2$

$= 3 + 2i - 3i + 2$ $(i^2 = 1)$

$= (3+2) + (2-3)i = 5 - i$

$\therefore \overline{C_1 . C_2} = \overline{C_1} . \overline{C_2}$

مثال جد النظير الضربي للعدد $C = 2 - 2i$ وضعه بالصيغة العادية للمركب

النظير الضربي للعدد C هو $\frac{1}{c}$

$\because C = 2 - 2i \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{2-2i}$

(حتى نجعل المقام عدداً نسبياً نضرب بسط ومقام العدد في مرافق المقام) $\Leftarrow$ مرافق العدد $2 - 2i$ هو $2 + 2i$

$\left(\frac{1}{2-2i} * \frac{2+2i}{2+2i}\right) = \frac{2+2i}{(2)^2+(2)^2}$ $[C.\bar{C} = a^2 + b^2]$

$= \frac{2+2i}{4+4} = \frac{2+2i}{8} = \frac{2}{8} + \frac{2}{8}i = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

مثال ضع بالصيغة العادية للعدد المركب $\frac{3-2i}{1+i}$

نضرب بسط ومقام العدد $*$ $(1-i)$ مرافق المقام

(البسط : عملية توزيع ، المقام : $a^2 + b^2$)

$= \frac{3-2i}{1+i} * \frac{1-i}{1-i}$

$$= \frac{3-3i-2i+2i^2}{(1)^2+(1)^2} = \frac{3-3i-2i-2}{2} \qquad (i^2=-1)$$
$$= \frac{1-5i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

مثال إذا كان $\frac{3-2i}{i}$, $\frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان فجد قيمة كل من $x, y \in \mathbb{R}$

∵ العددان مترافقان ⇐ $\frac{x-yi}{1+5i} = \overline{\left(\frac{3-2i}{i}\right)}$

(نأخذ مرافق البسط والمقام للعدد الثاني فقط) $\frac{x-yi}{1+5i} = \frac{3+2i}{-i}$

$-i\,(x-yi) = (1+5i)(3+2i)$ (حاصل ضرب الطرفين بالوسطين)

$$-xi + yi^2 = 3+2i+15i+10i^2 \Rightarrow -xi - y = 3+2i+15i-10$$
$$-y - xi = (3-10)+(2+15)i \Rightarrow -y-xi = -7+17i$$
$$-y=-7 \Rightarrow y=7 \quad , \quad -x = 17 \Rightarrow x=-17$$

مثال خارجي جد قيم x, y الحقيقيتين إذا كان $(x+yi)(3+2i) = 1$

عندما يكون x , y في نفس الطرف من السؤال فيكون الحل بأبقاء حدود x , y ونقل باقي حدود السؤال الى الطرف الاخر

$$[(x+yi)(3+2i)=1] \div (3+2i)$$

(نضرب بالمرافق)
$$x+yi = \frac{1}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i}$$
$$x+yi = \frac{3-2i}{9+4} \Rightarrow x+yi = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i \Rightarrow x = \frac{3}{13} \quad , y = \frac{-2}{13}$$

مثال إذا كان $C_1 = 3-2i$, $C_2 = 1+i$ تحقق من أن $\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} = \frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}$

الطرف الايسر : $\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} = \overline{\left(\frac{3-2i}{1+i}\right)} = \overline{\left(\frac{3-2i}{1+i} * \frac{1-i}{1-i}\right)} = \overline{\left(\frac{3-3i-2i+2i^2}{(1)^2+(1)^2}\right)}$

$$= \overline{\left(\frac{3-5i-2}{2}\right)} = \overline{\left(\frac{1-5i}{2}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

الطرف الأيمن : $\frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}} = \frac{\overline{(3-2i)}}{\overline{(1+i)}} = \frac{3+2i}{1-i}$ مرافق $3-2i$ هو $3+2i$ و مرافق $1+i$ هو $1-i$

(نضرب بمرافق المقام)
$$= \frac{3+2i}{1-i} * \frac{1+i}{1+i}$$
$$= \frac{3+3i+2i+2i^2}{(1)^2+(1)^2} = \frac{3+5i-2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$
$$\therefore \overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} = \frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}$$

ملاحظة: لإجراء قسمة العدد المركب c_1 على العدد المركب c_2 حيث أن $C_2 \neq 0$ فإننا نضرب بسط المقدار $\frac{C_1}{C_2}$ ومقامه في مرافق المقام $\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_1}{C_2} \times \frac{\overline{C_2}}{\overline{C_2}}$

مثال ضع كلاً مما يأتي بالصورة a+bi

a) $\frac{1+i}{1-i}$

(نضرب بمرافق المقام وهو $1+i$)
$$= \frac{1+i}{1-i} * \frac{1+i}{1+i}$$
$$= \frac{1+i+i+i^2}{(1)^2+(1)^2} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i = 0+i$$

$b)\ \frac{2-i}{3+4i}$

$$\frac{2-i}{3+4i}*\frac{3-4i}{3-4i}=\frac{6-8i-3i+4i^2}{(3)^2+(4)^2}=\frac{6-11i-4}{9+16}$$

$$=\frac{2-11i}{25}=\frac{2}{25}-\frac{11}{25}i$$

$c)\ \frac{1+2i}{-2+i}$

$$\frac{1+2i}{-2+i}*\frac{-2-i}{-2-i}=\frac{-2-i-4i-2i^2}{(-2)^2+(1)^2}$$

$$=\frac{-2-5i+2}{5}=\frac{-5i}{5}=-i=0-i$$

مثال خارجي

جد قيم $x,y\in\mathbb{R}$ اذا كان $x+yi=\frac{8+i}{2-i}$

$x+yi=\frac{8+i}{2-i}*\frac{2+i}{2+i}$ (نضرب بمرافق المقام للطرف الأيمن)

$x+yi=\frac{16+8i+2i+i^2}{(2)^2+(1)^2}\Rightarrow x+yi=\frac{16+10i-1}{5}$

$x+yi=\frac{15+10i}{5}\Rightarrow x+yi=\frac{15}{5}+\frac{10}{5}i$

$x+yi=3+2i$

$\therefore x=3\ ,\ \ y=2$

ملاحظة: يمكن تحليل x^2+y^2 إلى حاصل ضرب عددين مركبين كل منهما من الصورة $a+bi$ وذلك
$x^2+y^2=x^2-y^2i^2=(x-yi)(x+yi)$

ملاحظات

- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ (تحليل فرق بين مربعين)
- a^2+b^2 (لا يمكن تحليلها لأن إشارة الوسط +)
- $(a\mp b)^2=a^2\mp 2ab+b^2$ (تحليل مربع حدانية)

مثال

حلل كلاً من العددين 53 , 10 إلى حاصل ضرب عاملين من صورة $a+bi$ حيث b, a عددين نسبيين.

نغير إشارة الوسط ونضع للحد الثاني i^2 لأن $i^2=-1$

أما $10=9+1$
$=9-i^2$
$=(3-i)(3+i)$

أو $10=1+9$
$=1-9i^2$
$=(1-3i)(1+3i)$

أما $53=49+4$
$=49-4i^2$
$=(7-2i)(7+2i)$

أو $53=4+49$
$=4-49i^2=(2-7i)(2+7i)$

تـمـاريـن [1 – 1]

١ ـ ضع كلاً مما يأتي بالصيغة العادية للعدد المركب.

- $i^5 = i = 0 + i$ [قسمنا الأس على 4 والباقي رفعناه أس جديد لـ i]
- $i^6 = i^2 = -1 = -1 + 0i$
- $i^{124} = i^0 = 1 = 1 + 0i$ (بدون باقي $\frac{124}{4} = 31$)
- $i^{999} = i^3 = -i = 0 - i$ (الباقي $\frac{999}{4} = 249\ \frac{3}{4}$)
- $i^{4n+1}, \forall n \in n$

$i^{4n+1} = i^{4n}.i$ (بما أنه عند الضرب تجمع الأسس إذن جزءنا الأس وأعدناه إلى أصله)

$= (i^4)^n.i$ (∵ عند الرفع تضرب الأس ∴ أعدناه إلى أصله)

$= (1)^n.i$ $(i^4 = 1)$

$= 1.i = i = 0 + i$

- $(2 + 3i)^2 + (12 + 2i)$

$= 4 + 12i + 9i^2 + 12 + 2i$ (تحليل مربع حدانية للقوس الاول)

$= 4 + 12i - 9 + 12 + 2i = (4 - 9 + 12) + (12 + 2)i = 7 + 14i$

- $(10 + 3i)(0 + 6i)$

$= 0 + 60i + 0i + 18i^2$ (عملية توزيع)

$= 0 + 60i + 0i - 18 = -18 + 60i$

- $(1 + i)^4 - (1 - i)^4$

الطريقة الأولى:

$= [(1 + i)^2]^2 - [(1 - i)^2]^2 = [1 + 2i + i^2]^2 - [1 - 2i + i^2]^2$

$= [\cancel{1} + 2i - \cancel{1}]^2 - [\cancel{1} - 2i - \cancel{1}]^2 = (2i)^2 - (-2i)^2 = 4i^2 - 4i^2 = -4 + 4 = 0$

الطريقة الثانية :

$[(1 + i)^2 - (1 - i)^2][(1 + i)^2 + (1 - i)^2]$ (فرق بين مربعين)

$[(1 + 2i + i^2) - (1 - 2i + i^2)][(1 + 2i + i^2) + (1 - 2i + i^2)]$

$[(\cancel{1} + 2i - \cancel{1}) - (\cancel{1} - 2i - \cancel{1})]\ [(\cancel{1} + 2i - \cancel{1}) + (\cancel{1} - 2i - \cancel{1})\ ]$

$[2i + 2i][2i - 2i] = [4i][0] = 0$

- $\frac{12+i}{i}$

$\frac{12+i}{i} * \frac{-i}{-i} = \frac{-12i - i^2}{(1)^2} = -12i + 1 = 1 - 12i$ نضرب بمرافق المقام وهو $-i$

- $\frac{3+4i}{3-4i}$

$= \frac{3+4i}{3-4i} * \frac{3+4i}{3+4i}$ نضرب بمرافق المقام وهو $3 + 4i$

$= \frac{9+12i+12i+16i^2}{(3)^2+(4)^2} = \frac{9+24i-16}{9+16} = \frac{-7+24i}{25} = \frac{-7}{25} + \frac{24}{25}i$

- $\frac{i}{2+3i}$

$= \frac{i}{2+3} * \frac{2-3i}{2-3i}$ نضرب بسط ومقام المقدار بمرافق المقام وهو $2 - 3i$

$= \frac{2i - 3i^2}{(2)^2+(3)^2}$

$= \frac{2i+3}{4+9} = \frac{3+2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$

- $(\frac{3+i}{1+i})^3$

نضرب بسط ومقام المقدار بمرافق المقام وهو $1-i$ داخل القوس

$$= (\frac{3+i}{1+i} * \frac{1-i}{1-i})^3$$
$$= (\frac{3-3i+i-i^2}{(1)^2+(1)^2})^3 = (\frac{3-2i+1}{2})^3$$
$$= (\frac{4-2i}{2})^3 = (\frac{4}{2} - \frac{2i}{2})^3$$

نجزئ القوس إلى

$$= (2-i)^3$$
$$= (2-i)(2-i)^2 = (2-i)(4-4i+i^2)$$
$$= (2-i)(4-4i-1) = (2-i)(3-4i)$$
$$= 6-8i-3i+4i^2 \quad = 6-11i-4 \quad = 2-11i$$

- $\frac{2+3i}{1-i} * \frac{1+4i}{4+i}$

$$\left(\frac{2+3i}{1-i} * \frac{1+i}{1+i}\right)\left(\frac{1+4i}{4+i} * \frac{4-i}{4-i}\right)$$
$$\left(\frac{2+2i+3i+3i^2}{(1)^2+(1)^2}\right)\left(\frac{4-i+16i-4i^2}{(4)^2+(1)^2}\right)$$
$$= \left(\frac{2+5i-3}{2}\right)\left(\frac{4+15i+4}{17}\right)$$
$$= \left(\frac{-1+5i}{2}\right)\left(\frac{8+15i}{17}\right)$$
$$= \frac{-8-15i+40i+75i^2}{34}$$
$$= \frac{-8+25i-75}{34}$$
$$= \frac{-83+25i}{34} = \frac{-83}{34} + \frac{25}{34}i$$

طريقة اخرى للحل

$$\frac{2+8i+3i+12i^2}{4+i-4i-i^2}$$
$$\frac{2+11i-12}{4-3i+1}$$
$$\frac{-10+11i}{5-3i}$$
$$\frac{-10+11i}{5-3i} \cdot \frac{5+3i}{5+3i}$$
$$\frac{-50-30i+55i+33i^2}{25+9}$$
$$\frac{-50+25i-33}{34}$$
$$\frac{-83}{34} + \frac{25}{34}i$$

- $(1+i)^3 + (1-i)^3$

نجزىء الاقواس

$$= [(1+i)^2(1+i)] + [(1-i)^2(1-i)]$$
$$= [(1+2i+i^2)(1+i)] + [(1-2i+i^2)(1-i)]$$
$$= [(1+2i-1)(1+i)] + [(1-2i-1)(1-i)]$$
$$= [2i(1+i)] + [-2i(1-i)]$$
$$= [2i+2i^2] + [-2i+2i^2] \quad = [2i-2] + [-2i-2] \quad = (-2-2) + (2-2)i = -4+0i$$

٢ - جد قيمة كل من y , x الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلات الآتية

a) $y + 5i = (2x+i)(x+2i)$

نوزع قوسي الطرف الأيمن

$$y + 5i = 2x^2 + 4xi + xi + 2i^2$$
$$y + 5i = 2x^2 + 5xi - 2$$
$$y + 5i = (2x^2 - 2) + 5xi$$
$$y = 2x^2 - 2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$5 = 5x \Rightarrow x = 1$$

نعوض في (١)

$$y = 2(1)^2 - 2 \Rightarrow y = 0$$



$b)\ \mathbf{8i = (x+2i)(y+2i)+1}$ **[وزاري]**

ننقل 1 إلى الطرف الأيسر ونوزع الأقواس في الطرف الأيمن

$-1+8i = xy+2xi+2yi+4i^2$

$-1+8i = xy+(2x+2y)i-4$

$-1+8i = (xy-4)+(2x+2y)i$

$-1 = xy-4 \Rightarrow -1+4 = xy \Rightarrow xy = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{y}$ ....(1)

$[2x+2y=8] \div 2$

$x+y=4$ ....(2) نعوض (١) في (٢)

$\left[\frac{3}{y}+y=4\right]*y$

$3+y^2 = 4y \Rightarrow y^2-4y+3=0 \Rightarrow (y-3)(y-1)=0$

أما $y-3=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow x=\frac{3}{3} \Rightarrow x=1$

أو $y-1=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=\frac{3}{1} \Rightarrow x=3$

$c)\ \mathbf{\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+(x+yi) = (1+2i)^2}$

نضرب الحد الاول بالمرافق ونحلل الطرف الايمن مربع حدانية

$\left(\frac{1-i}{1+i}*\frac{1-i}{1-i}\right)+(x+yi) = 1+4i+4i^2.$

$\left(\frac{1-i-i+i^2}{(1)^2+(1)^2}\right)+(x+yi) = 1+4i-4$

$\left(\frac{1-2i-1}{2}\right)+(x+yi) = -3+4i$

$\frac{-2i}{2}+(x+yi) = -3+4i$

$-i+(x+yi) = -3+4i \Rightarrow (x+yi) = -3+4i+i \Rightarrow (x+yi) = -3+5i$

$x=-3\ , y=5$

$d)\ \mathbf{\frac{2-i}{1+i}x+\frac{3-i}{2+i}y = \frac{1}{i}}$

كل حد من الحدود نضربه في مرافقه :

$\left(\frac{2-i}{1+i}*\frac{1-i}{1-i}\right)x+\left(\frac{3-i}{2+i}*\frac{2-i}{2-i}\right)y = \frac{1}{i}*\frac{-i}{-i}$

$\left(\frac{2-2i-i+i^2}{(1)^2+(1)^2}\right)x+\left(\frac{6-3i-2i+i^2}{(2)^2+(1)^2}\right)y = \frac{-i}{(1)^2}$

$\left(\frac{2-3i-1}{2}\right)x+\left(\frac{6-5i-1}{5}\right)y = -i$

$\left(\frac{1-3i}{2}\right)x+\left(\frac{5-5i}{5}\right)y = -i$

$\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)x+(1-i)y = 0-i$

$\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}xi+y-yi = 0-i$

$\left(\frac{1}{2}x+y\right)+\left(\frac{-3}{2}x-y\right)i = 0-i$

$\frac{1}{2}x+y = 0$ ....(1)

$\frac{-3}{2}x-y = -1$ ....(2) بالجمع

$-x=-1 \Rightarrow x=1$ نعوض في (1)

$\frac{1}{2}(1)+y=0 \Rightarrow \frac{1}{2}+y=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$

٣ - أثبت ان :

a) $\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{8}{25}i$

الطرف الأيسر : $\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{1}{4-4i+i^2}-\frac{1}{4+4i+i^2}$

$=\frac{1}{4-4i-1}-\frac{1}{4+4i-1}=\frac{1}{3-4i}-\frac{1}{3+4i}$

$=\left(\frac{1}{3-4i}*\frac{3+4i}{3+4i}\right)-\left(\frac{1}{3+4i}*\frac{3-4i}{3-4i}\right)=\frac{3+4i}{(3)^2+(4)^2}-\frac{3-4i}{(3)^2+(4)^2}$

$=\frac{3+4i}{25}-\frac{3-4i}{25}=\frac{(3+4i)+(-3+4i)}{25}$

$=\frac{(3-3)+(4+4)i}{25}=\frac{0+8i}{25}=\frac{8i}{25}$ الطرف الأيمن

∴ الطرف الأيسر = الطرف الأيمن

b) $\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=-2$

الطرف الأيسر $\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=\frac{1-2i+i^2}{1+i}+\frac{1+2i+i^2}{1-i}$

$=\frac{1-2i-1}{1+i}+\frac{1+2i-1}{1-i}=\frac{-2i}{1+i}+\frac{2i}{1-i}$

$=\left(\frac{-2i}{1+i}*\frac{1-i}{1-i}\right)+\left(\frac{2i}{1-i}*\frac{1+i}{1+i}\right)=\frac{-2i+2i^2}{(1)^2+(1)^2}+\frac{2i+2i^2}{(1)^2+(1)^2}=\frac{-2i-2}{2}+\frac{2i-2}{2}$

$=\frac{-2i}{2}-\frac{2}{2}+\frac{2i}{2}-\frac{2}{2}=-i-1+i-1=-2$ الطرف الأيمن

∴ الطرف الأيسر = الطرف الأيمن

c) $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)=4$

بالتعويض عن $i^2=-1$, $i^3=-i$ الطرف الأيسر $=(1-i)(1+1)(1+i)$

الطرف الأيمن $=(1-i)(2)(1+i)=2(1-i)(1+i)=2((1)^2+(1)^2)=2(2)=4$

∴الطرف الأيسر = الطرف الأيمن

٤- حلل كلاً من الأعداد (85)، (41)، (125)، (29) إلى حاصل ضرب عاملين من الصورة $a+bi$ حيث a , b عددان نسبيان:

اما
$29=4+25$
$=4-25i^2$
$=(2-5i)(2+5i)$

او
$29=25+4$
$=25-4i^2$
$=(5-2i)(5+2i)$

اما
$125=4+121$
$=4-121i^2$
$=(2-11i)(2+11i)$

او
$125=121+4$
$=121-4i^2$
$=(11-2i)(11+2i)$

$41=16+25$
$=16-25i^2$
$=(4-5i)(4+5i)$

$41=25+16$
$=25-16i^2$
$=(5-4i)(5+4i)$

$85=4+81$
$=4-81i^2$
$=(2-9i)(2+9i)$

$85=81+4$
$=81-4i^2$
$=(9-2i)(9+2i)$

٥- جد قيمة x, y الحقيقيتين إذا علمت أن $\frac{6}{x+yi}$, $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان

∵ العددان مترافقان

$$\frac{3+i}{2-i} = \overline{\left(\frac{6}{x+yi}\right)}$$

$$\frac{3+i}{2-i} = \frac{6}{x-yi}$$

$$(3+i)(x-yi) = 6(2-i)] \quad \div (3+i)$$

$$x - yi = \frac{12-6i}{3+i} \Rightarrow x - yi = \frac{12-6i}{3+i} * \frac{3-i}{3-i}$$

$$x - yi = \frac{36-12i-18i+6i^2}{(3)^2+(1)^2} \Rightarrow x - yi = \frac{36-30i-6}{9+1}$$

$$x - yi = \frac{30-30i}{10} \Rightarrow x - yi = \frac{30}{10} - \frac{30}{10}i$$

$$x - yi = 3 - 3i \Rightarrow x = 3 \;, \; y = 3$$

أسئلة وزارية

س/ ضع العدد $\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2$ بالصيغة العادية للعدد المركب

نضرب بمرافق المقام داخل القوس

$$\left(\frac{3-i}{1+i} * \frac{1-i}{1-i}\right)^2$$

$$= \left(\frac{3-3i-i+i^2}{(1)^2+(1)^2}\right)^2 = \left(\frac{3-4i-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{2-4i}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2} - \frac{4i}{2}\right)^2$$

$$= (1-2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2 \quad = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i$$

س/ $(3+2i)(-2+i)$ بالصيغة العادية للعدد المركب ثم جد نظيره الضربي وبالصيغة العادية أيضاً.

$$(3+2i)(-2+i) = -6 + 3i - 4i + 2i^2 = -6 - i - 2 \; = -8 - i$$

(النظير الضربي للعدد C هو $\frac{1}{C}$)

∴ النظير الضربي $= \frac{1}{-8-i}$

(حتى نجعل العدد بالصيغة العادية يجب ضربه بمرافق المقام)

$$= \frac{1}{-8-i} * \frac{-8+i}{-8+i}$$

$$= \frac{-8+i}{64+1} = \frac{-8}{65} + \frac{1}{65}i$$

س/ جد قيمتي x, y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة: $(3x + 2yi)^2 = \frac{200}{4+3i}$

نحلل الطرف الأيسر مربعة حدانية ونضرب الطرف الأيمن بالمرافق

$$9x^2 + 12xyi + 4y^2i^2 = \frac{200}{4+3i} * \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$9x^2 + 12xyi - 4y^2 = \frac{800-600i}{16+9}$$

$$(9x^2 - 4y^2) + (12xy)i = \frac{800}{25} - \frac{600i}{25}$$

$$(9x^2 - 4y^2) + (12xy)i = 32 - 24i$$

$$9x^2 - 4y^2 = 32 \;\ldots\ldots\ldots(1)$$

$12xy = -24 \Rightarrow y = \frac{-24}{12x} \Rightarrow y = \frac{-2}{x}$ نعوض في (١)

$$9x^2 - 4\left(\frac{-2}{x}\right)^2 = 32 \Rightarrow \left[9x^2 - 4\left(\frac{4}{x^2}\right) = 32\right] * x^2$$

$$9x^4 - 16 = 32x^2 \Rightarrow 9x^4 - 32x^2 - 16 = 0$$

$$(9x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$$

أما $9x^2 + 4 = 0 \Rightarrow 9x^2 = -4 \Rightarrow x^2 = \frac{-4}{9} \notin R$ يهمل

او $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \mp 2$

عندما $x = 2 \Rightarrow y = \frac{-2}{2} \Rightarrow y = -1$
عندما $x = -2 \Rightarrow y = \frac{-2}{-2} \Rightarrow y = 1$

س/ جد قيمة x, y الحقيقيتين $x(x+i) + y(y-i) + i = 13$

ننقل i إلى الطرف الأيمن حتى يصبح لدينا عدد مركب على شكل $(a + bi)$ في الطرف الايمن

$x^2 + xi + y^2 - yi = 13 - i$
$(x^2 + y^2) + (x - y)i = 13 - i$
$x^2 + y^2 = 13 \dots\dots\dots (1)$
$x - y = -1 \Rightarrow x = y - 1$ نعوض في (١)
$(y-1)^2 + y^2 = 13 \Longrightarrow y^2 - 2y + 1 + y^2 = 13$
$2y^2 - 2y + 1 - 13 = 0 \Longrightarrow [2y^2 - 2y - 12 = 0] \div 2$
$y^2 - y - 6 = 0 \Longrightarrow (y-3)(y+2) = 0$
اما $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 3 - 1 \Rightarrow x = 2$
او $y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x = -2 - 1 \Rightarrow x = -3$

س/ جد قيمة x, y الحقيقيتين $x + yi = (1-i)^9 + (1+i)^{11}$

$x + yi = (1-i)^8(1-i) + (1+i)^{10}(1+i)$
$x + yi = [(1-i)^2]^4(1-i) + [(1+i)^2]^5(1+i)$
$x + yi = [1 - 2i + i^2]^4(1-i) + [1 + 2i + i^2]^5(1+i)$
$x + yi = (\cancel{1} - 2i - \cancel{1})^4(1-i) + (\cancel{1} + 2i - \cancel{1})^5(1+i)$
$x + yi = (-2i)^4(1-i) + (2i)^5(1+i)$
$x + yi = (16i^4)(1-i) + (32i^5)(1+i)$ $\quad i^4 = 1 \,,\; i^5 = i$
$x + yi = 16(1-i) + 32i(1+i)$
$x + yi = 16 - 16i + 32i + 32i^2$
$x + yi = 16 - 16i + 32i - 32$
$x + yi = -16 + 16i$
$\therefore x = -16 \quad , \quad y = 16$

س/ جد الصيغة العادية للعدد المركب $(1+i)^5 - (1-i)^5$

$(1+i)^4(1+i) - (1-i)^4(1-i)$ نجزأ الأقواس
$= [(1+i)^2]^2(1+i) - [(1-i)^2]^2(1-i)$
$= (1 + 2i + i^2)^2(1+i) - (1 - 2i + i^2)^2(1-i)$
$= (\cancel{1} + 2i - \cancel{1})^2(1+i) - (\cancel{1} - 2i - \cancel{1})^2(1-i)$
$= (2i)^2(1+i) - (-2i)^2(1-i) = (4i^2)(1+i) - (4i^2)(1-i)$
$= (-4)(1+i) - (-4)(1-i) = -\cancel{4} - 4i + \cancel{4} - 4i$
$= -8i = 0 - 8$

س/ إذا كان $x = 2 + 3i \,,\; y = 3 - i$ جد قيمة $x^2 + 2y^2$

نعوض عن قيمتي y, x في المعادلة $x^2 + 2y^2$

$= (2 + 3i)^2 + 2(3 - i)^2$
$= 4 + 12i + 9i^2 + 2(9 - 6i + i^2)$
$= 4 + \cancel{12i} - 9 + 18 - \cancel{12i} - 2$
$= (4 - 9 + 18 - 2) = 11 + 0i$

س/ إذا كان $x = 3 + 2i$, $y = 1 - i$ أثبت ان $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$

الطرف الأيسر : $\overline{x+y} = \overline{(3+2i)+(1-i)}$

$= \overline{(3+1)+(2-1)i} = \overline{4+i} = 4 - i$

الطرف الأيمن : $\overline{x} + \overline{y} = \overline{(3+2i)} + \overline{(1-i)}$

$= (3-2i) + (1+i) = (3+1) + (-2+1)i = 4 - i$

∴ الطرف الأيسر = الطرف الأيمن

س/ جد ناتج $(3+4i)^2(5-3i)(1+i)$ بالصيغة الديكارتية للعدد المركب.

نفتح القوس الأول مربع حدانية ونوزع القوسين الثاني والثالث

$= (9 + 24i + 16i^2)(5 + 5i - 3i - 3i^2)$
$= (9 + 24i - 16)(5 + 2i + 3)$
$= (-7 + 24i)(8 + 2i)$
$= -56 - 14i + 192i + 48i^2$
$= -56 + 178i - 48$
$= -104 + 178i$

الصيغة العادية للعدد المركب وتسمى أيضاً الصيغة الجبريه أما الصيغة الديكارتية هي $(-104, 178)$

س / إذا كان $x = -1 + 2i$ جد $x^2 + 3x + 5$ بالصيغة الديكارتية:

$= (-1 + 2i)^2 + 3\,(-1 + 2i) + 5$
$= 1 - 4i + 4i^2 - 3 + 6i + 5 = 3 - 4i - 4 + 6i = -1 + 2i$

الصيغة الديكارتية هي $(-1, 2)$

س/ إذا كان $x = 2 - i$ جد $2x^2 - 3(x+1) - 8$

$= 2(2-i)^2 - 3[(2-i) + 1] - 8$
$= 2(4 - 4i + i^2) - 3[3 - i] - 8 = 2(4 - 4i - 1) - 9 + 3i - 8$
$= 8 - 8i - 2 - 9 + 3i - 8 = -11 - 5i$

الصيغة الديكارتية (-11,-5)

أسئلة اثرائية

س/ جد قيمتي x, y إذا علمت أن $\frac{2+4i}{1-i} + \frac{5-5i}{x+yi} = 2 + 2i$

نضع الحد الذي فيه y, x في طرف وباقي الحدود في طرف آخر.

$\frac{5-5i}{x+yi} = 2 + 2i - \frac{2+4i}{1-i}$

$\frac{5-5i}{x+yi} = 2 + 2i - \left(\frac{2+4i}{1-i} * \frac{1+i}{1+i}\right) \Rightarrow \frac{5-5i}{x+yi} = 2 + 2i - \left(\frac{2+2i+4i+4i^2}{(1)^2+(1)^2}\right)$

$\frac{5-5i}{x+yi} = 2 + 2i - \left(\frac{2+6i-4}{2}\right) \Rightarrow \frac{5-5i}{x+yi} = 2 + 2i - \left(\frac{-2}{2} + \frac{6i}{2}\right)$

$\frac{5-5i}{x+yi} = 2 + 2i - (-1 + 3i) \Rightarrow \frac{5-5i}{x+yi} = 2 + 2i + 1 - 3i$

$\frac{5-5i}{x+yi} = 3 - i \Rightarrow 5 - 5i = (3-i)(x+yi)$ نقسم على $(3-i)$

$x + yi = \frac{5-5i}{3-i} \Rightarrow x + yi = \frac{5-5i}{3-i} * \frac{3+i}{3+i}$

$x + yi = \frac{15+5i-15i-5i^2}{9+1} \Rightarrow x + yi = \frac{(15+5)+(5-15)i}{10}$

$x + yi = \frac{20}{10} + \frac{-10}{10}i \Rightarrow x + yi = 2 - i \Rightarrow x = 2 \ , \ y = -1$

س/ جد قيمة K التي تحقق المعادلة $i = k(1-7i)$

نقسم الطرفين على $1-7i$ فنحصل على:

$$k = \frac{i}{1-7i} \Rightarrow k = \frac{i}{1-7i} * \frac{1+7i}{1+7i}$$

$$k = \frac{i+7i^2}{1+49} \Rightarrow k = \frac{i-7}{50} \Rightarrow k = \frac{-7}{50} + \frac{1}{50}i$$

وزاريـات

س/ جد قيمتي x, y الحقيقتين اذا علمت ان $(2x+yi)^2 = \frac{19-22i}{1+2i}$

س/ جد قيمتي x, y الحقيقتين اذا علمت ان : a) $(2+xi)(i-x)(3y+7i) = 9y^2+49$

b) $\sqrt{x+yi} = \sqrt{1+\sqrt{3}\,i} + \sqrt{1-\sqrt{3}\,i}$

الجذور التربيعية للعدد المركب

لقد تعلمت أنه إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً فإنه يوجد عددان حقيقيان هما $\pm\sqrt{a}$ يحقق كل منهما المعادلة $x^2 = a$ ويسمى $\pm\sqrt{a}$ الجذرين التربيعيين للعدد a، أما إذا كان $a = 0$ فإن له جذر واحد هو 0 والآن سنتناول دارسة الجذور التربيعية للعدد المركب.

مثال جد الجذور التربيعية للعدد $c = 8+6i$

نفرض ان الجذر التربيعي للعدد c هو $x+yi$

(تربيع الجذر يساوي العدد المركب)

$(x+yi)^2 = 8+6i$

$x^2 + 2xyi + y^2i^2 = 8+6i$

$x^2 + 2xyi - y^2 = 8+6i$

$(x^2-y^2) + (2xy)i = 8+6i$

$x^2 - y^2 = 8 \quad \dots\dots\dots\dots (1)$

$2xy = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{2x} \Rightarrow y = \frac{3}{x}$ نعوض في (١)

$x^2 - (\frac{3}{x})^2 = 8$

$[x^2 - \frac{9}{x^2} = 8] * x^2$ (نضرب في x^2 حتى نتخلص من المقام)

$x^4 - 9 = 8x^2 \Rightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x^2-9)(x^2+1) = 0$

اما $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \mp 3$

عندما $x = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{3} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (3+i)$

عندما $x = -3 \Rightarrow y = \frac{3}{-3} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (-3-i)$

او $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \quad \notin R$ يهمل

∴ جذري العدد c هما $\{-3-i, 3+i\}$

مثال

جد الجذور التربيعية للأعداد $8i, -i, -17, -25$

$a)\ c^2 = -25$

ملاحظة: إذا كان العدد حقيقي مباشرة نأخذ الجذر التربيعي له

$c = \mp\sqrt{-25}$

$c = \mp\sqrt{25}\sqrt{-1}$ $(\sqrt{-1} = i)$

$c = \mp 5i$

∴ الجذران هما $\{5i, -5i\}$

$b)\ c^2 = -17$

$c = \mp\sqrt{-17}$

$c = \mp\sqrt{17}\sqrt{-1}$

$c = \mp\sqrt{17}\, i$

∴ الجذران هما $\{\sqrt{17}i , -\sqrt{17}i\}$

$c)\ -i$

ملاحظة: إذا كان العدد تخيلي فهو عدد مركب حيث نفرض ان الجذر التربيعي للعدد $(-i)$ هو $x + yi$

$(x + yi) = \sqrt{-i}$ نفرض

$(x + yi)^2 = -i$ بتربيع الطرفين

$x^2 + 2xyi + y^2i^2 = 0 - i$

$(x^2 - y^2) + 2xyi = 0 - i$

$x^2 - y^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$2xy = -1 \Rightarrow y = \frac{-1}{2x}$ نعوض في (١)

$x^2 - (\frac{-1}{2x})^2 = 0 \Longrightarrow \left[x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0\right] * 4x^2$

$4x^4 - 1 = 0 \Longrightarrow 4x^4 = 1 \Rightarrow x^4 = \frac{1}{4}$ بالجذر الرابع

$x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$

عندما $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{-1}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})}) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\,)$

عندما $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{-1}{2(-\frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, i)$

∴ الجذران هما $\{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \,,\, \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\}$

$d)\ 8i$

$\therefore (x + yi)^2 = 0 + 8i$ نفرض الجذر التربيعي للعدد $8i$ هو $x + yi$

$x^2 + 2xyi + y^2i^2 = 0 + 8i \Longrightarrow (x^2 - y^2) + (2xy)i = 0 + 8i$

$x^2 - y^2 = 0 \ldots\ldots (1)$

$2xy = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{2x} \Rightarrow y = \frac{4}{x}$ نعوض في (١)

$x^2 - (\frac{4}{x})^2 = 0$

$\left[x^2 - \frac{16}{x^2} = 0\right] * x^2 \quad \Longrightarrow \quad x^4 - 16 = 0 \quad \Longrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

أما $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \notin R$ يهمل



أو $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\mp 2$

عندما $x=2 \Rightarrow y=\frac{4}{2} \Rightarrow y=2 \Rightarrow (2+2i)$

عندما $x=-2 \Rightarrow y=\frac{4}{-2} \Rightarrow y=-2 \Rightarrow (-2-2i)$

∴ الجذران هما $\{2+2i\,,-2-2i\}$

حل المعادلة التربيعية في $\mathbb{C}$

تعلمت من المرحلة المتوسطة ان للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث $a\neq 0$ وان $a,b,c\in\mathbb{R}$ حلين يمكن إيجادهما بالدستور $x=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

وعرفت أنه إذا كان المقدار المميز b^2-4ac سالباً فإنه لا يوجد للمعادلة حلول حقيقية ولكن لها حلان في مجموعة الأعداد المركبة.

مثال **حل المعادلة $x^2+4x+5=0$ في مجموعة الأعداد المركبة:**

نلاحظ ان هذه المعادلة لا يمكن حلها بالتجربة إذن نستخدم قانون الدستور حيث:

$a=1\,,\ b=4\,,\ c=5$

$x=\frac{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Longrightarrow x=\frac{-4\mp\sqrt{16-20}}{2}$

$x=\frac{-4\mp\sqrt{-4}}{2} \Longrightarrow x=\frac{-4\mp\sqrt{4}\sqrt{-1}}{2}$ $\quad(\sqrt{-1}=i)$

$x=-\frac{4}{2}\mp\frac{2i}{2} \Longrightarrow x=-2\mp i$

∴جذري المعادلة هما $\{-2+i,-2-i\}$

ملاحظة: من الدستور نعلم ان جذري المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ التي معاملاتها حقيقية هما $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,,x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ومجموع الجذرين هو $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ وحاصل ضرب الجذرين هو $x_1.x_2=\frac{c}{a}$

ويمكن الاستفادة من هذه الخواص:

أولاً: إذا كان $x+yi$ هو أحد جذري المعادلة $ax^2+b+c=0$ حيث $\forall a,b,c\in\mathbb{R}\,,a\neq 0$ فإن $x-yi$ هو الجذر الآخر.

اذا كانت المعادلة ذات معاملات حقيقية يكون جذراها مترافقان

ثانياً: بقسمة طرفي المعادلة $ax^2+bx+c=0$ على $a\neq 0$ نحصل $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

x^2 −(مجموع الجذرين) x+ (حاصل ضرب الجذرين) $=0$

مثال **جد المعادلة التربيعية التي جذراها $\mp(2+2i)$**

$c_1=2+2i \quad , \quad c_2=-2-2i$

مجموع الجذرين : $c_1+c_2=(2+2i)+(-2-2i)$

$= (2-2) + (2-2)i = 0 + 0i = 0$

حاصل ضرب الجذرين : $c_1 . c_2 = (2+2i)(-2-2i)$

$= -4 - 4i - 4i - 4i^2 \qquad (i^2 = -1)$

$= -4 - 4i - 4i + 4 = -8i$

$x^2 -$(مجموع الجذرين) x +(حاصل ضرب الجذرين) $= 0$

المعادلة التربيعية $x^2 - (0)x + (-8i) = 0 \Rightarrow x^2 - 8i = 0$

مثال **كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية واحد جذريها $3 - 4i$**

ملاحظة: بما أن المعاملات حقيقية ∴ جذراها مترافقان ∵ أحد الجذرين $3 - 4i$ ∴ الجذر الآخر هو $3 + 4i$

مجموع الجذرين : $c_1 + c_2 = (3-4i) + (3+4i) = 6 + 0i$

حاصل ضرب الجذرين : $c_1 . c_2 = (3-4i)(3+4i) = (3)^2 + (4)^2$

$= 9 + 16 = 25$

$x^2 -$ (مجموع الجذرين) $x +$ حاصل ضرب الجذرين $= 0$

$x^2 - 6x + 25 = 0$

تمارين $[1-2]$

١- حل المعادلات التربيعية الآتية وبين أي منها يكون جذراها مترافقين؟

$\boldsymbol{a)\ z^2 = -12}$

$z = \mp\sqrt{-12}$

$z = \mp\sqrt{12}\sqrt{-1}$

$z = \mp 2\sqrt{3}\, i$

∴ الجذران هما $\{2\sqrt{3}i, -2\sqrt{3}i\}$ مترافقان

$\boldsymbol{b)\ z^2 - 3z + 3 + i = 0}$

$a = 1, \quad b = -3 \quad , c = 3 + i$

$z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow z = \frac{3 \mp \sqrt{9 - 4(3+i)}}{2}$

$z = \frac{3 \mp \sqrt{9 - 12 - 4i}}{2} \Rightarrow z = \frac{3 \mp \sqrt{9 - 12 - 4i}}{2} \Rightarrow z = \frac{3 \mp \sqrt{-3 - 4i}}{2}$

∵ عدد مركب تحت الجذر

نفرض $\boldsymbol{x + yi = \sqrt{-3 - 4i}}$

$(x + yi)^2 = (\sqrt{-3 - 4i})^2$ بتربيع الطرفين

$x^2 + 2xyi + y^2 i^2 = -3 - 4i$

$(x^2 - y^2) + 2xyi = -3 - 4i$

$x^2 - y^2 = -3 \ \ldots\ldots (1)$

$2xy = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{2x} \Rightarrow y = \frac{-2}{x}$ نعوض في (١)

$x^2 - (\frac{-2}{x})^2 = -3 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{4}{x^2} = -3\right] * x^2$

$x^4 - 4 = -3x^2 \Rightarrow x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$

أما $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$ يهمل

او $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

عندما $x = 1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow (1-2i)$

عندما $x = -1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (-1+2i)$

∴ الجذران هما $\mp(1-2i)$ نضع الجذران بدل الجذر في قانون الدستور

$$\therefore z = \frac{3\mp(1-2i)}{2}$$

أما $z = \frac{3+(1-2i)}{2} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$

أو $z = \frac{3-(1-2i)}{2} = \frac{3-1+2i}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2i}{2} = 1+i$

∴ جذري المعادلة هما $\{2-i, 1+i\}$ الجذران غير مترافقان

c) $2z^2 - 5z + 13 = 0$

$a = 2 \quad b = -5 \quad c = 13$ باستخدام الدستور

$$z = \frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow z = \frac{5\mp\sqrt{25-104}}{4}$$

$$z = \frac{5}{4} \mp \frac{\sqrt{-79}}{4} \Rightarrow z = \frac{5}{4} \mp \frac{\sqrt{79}\sqrt{-1}}{4} \Rightarrow z = \frac{5}{4} \mp \frac{\sqrt{79}}{4}i$$

∴ جذري المعادلة هي $\{\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{79}}{4}i, \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{79}}{4}i\}$ الجذران مترافقان

d) $z^2 + 2z + i(2-i) = 0$

$$z^2 + 2z + 2i - i^2 = 0$$

$$z^2 + 2z + 2i + 1 = 0$$

$$\therefore a = 1, \ b = 2, \ c = 2i+1$$

$$z = \frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2\mp\sqrt{4-4(2i+1)}}{2} = \frac{-2\mp\sqrt{4-8i-4}}{2} = \frac{-2\mp\sqrt{-8i}}{2}$$

∵ تحت الجذر عدد مركب ∴ نساوي الجذر للعدد $x + yi$

$\therefore x + yi = \sqrt{-8i}$ بتربيع الطرفين

$x^2 + 2xyi + yi^2 = 0 - 8i \Rightarrow (x^2 - y^2) + (2xy)i = 0 - 8i$

$(x^2 - y^2) = 0 \ldots\ldots\ldots(1)$

$2xy = -8 \Rightarrow \ y = \frac{-8}{2x} \Rightarrow \ y = \frac{-4}{x}$ نعوض في (١)

$x^2 - (\frac{-4}{x})^2 = 0 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{16}{x^2} = 0\right] * x^2$

$x^4 - 16 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0 \quad , \quad (x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \notin R$ يهمل)

$x^2 - 4 = 0 \ \Rightarrow \ x^2 = 4 \Rightarrow x \mp 2$

عندما $x = 2 \Rightarrow y = \frac{-4}{2} \Rightarrow y = -2 \Rightarrow \ (2-2i)$

عندما $x = -2 \Rightarrow y = \frac{-4}{-2} \Rightarrow y = 2 \ \Rightarrow \ (-2+2i)$

∴ جذري المعادلة هما $\mp(2-2i)$

$$\therefore \ z = \frac{-2+(2-2i)}{2} = \frac{-2+2-2i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$z = \frac{-2-(2-2i)}{2} = \frac{-2-2+2i}{2} = \frac{-4}{2} + \frac{2}{2}i = -2+i$$

∴ الجذران هما $\{-i, -2+i\}$ غير مترافقان

طريقة أخرى للحل

$(Z+i)(Z+(2-i)) = 0$

أما $Z + i = 0$

$\Rightarrow Z = -i$

او $Z + (2-i) = 0$

$\Rightarrow Z = -2+i$

$S = \{-i, -2+i\}$

e) $4z^2 + 25 = 0$

الطريقة الأولى

$4z^2 = -25$

$z^2 = \frac{-25}{4}$ بالجذر التربيعي

$z = \mp\frac{\sqrt{25}\sqrt{-1}}{\sqrt{4}}$

$z = \mp\frac{5i}{2}$

∴ جذرا المعادلة هما $\{\frac{5}{2}i, \frac{-5}{2}i\}$ غير مترافقان

الطريقة الثانية: تحويله إلى فرق بين مربعين

$4z^2 - 25i^2 = 0$

$(2z + 5i)(2z - 5i) = 0$

أما $2z + 5i = 0 \Rightarrow 2z = -5i \Rightarrow z = \frac{-5i}{2}$

أو $2z - 5i = 0 \Rightarrow 2z = 5i \Rightarrow z = \frac{5i}{2}$

∴ جذرا المعادلة هما $\{\frac{-5}{2}i, \frac{5}{2}i\}$ غير مترافقان

ملاحظة / الطريقة الثالثة : الدستور

f) $z^2 - 2zi + 3 = 0$

الطريقة الاولى

$a = 1, \quad b = -2i, \quad c = 3$

$z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$z = \frac{2i \mp \sqrt{4i^2 - 12}}{2}$

$z = \frac{2i \mp \sqrt{-4-12}}{2} = \frac{2i}{2} \mp \frac{\sqrt{-16}}{2}$

$= \frac{2i}{2} \mp \frac{4i}{2}$

$= i \mp 2i$

أما $z = i + 2i \Rightarrow z = 3i$

او $z = i - 2i \Rightarrow z = -i$

∴ الجذران هما $\{-i, 3i\}$ غير مترافقان

طريقة ثانية:

يمكن كتابة المعادلة بالشكل الآتي

$z^2 - 2zi - 3i^2 = 0$

بأضافة $-i^2$ للحد الاخير

وذلك لان $-i^2 = 1$

$(z - 3i)(z + i) = 0$

أما $z - 3i = 0$

$\Rightarrow z = 3i$

أو $z + i = 0$

$\Rightarrow z = -i$

∴ الجذران هما $\{-i, 3i\}$ غير مترافقان

طريقة ثالثة :

$Z^2 - 2Zi = -3$

نكمل الطرف الايسر مربع كامل

وذلك بأضافة i^2 للطرفين

$(Z^2 - 2Zi + i^2) = i^2 - 3$

$(Z - i)^2 = -1 - 3$

$(Z - i)^2 = -4$ بجذر الطرفين

$Z - i = \sqrt{-4}$

$Z - i = \mp 2i$

اما $Z = 2i + i$

$\Rightarrow Z = 3i$

أو $Z = -2i + i$

$\Rightarrow Z = -i$

$S = \{-i, 3i\}$

٢ – كون المعادلة التربيعية التي جذراها m,L حيث

a) $m = 1 + 2i \quad , \quad L = 1 - i$

$m + L = (1 + 2i) + (1 - i) = 2 + i$

$m.L = (1 + 2i).(1 - i) = 1 - i + 2i - 2i^2 = 1 + i + 2 = 3 + i$

$x^2 -$ (مجموع الجذرين) $x +$ (حاصل ضرب الجذرين) $= 0$

$x^2 - (2 + i)x + (3 + i) = 0$

b) $m = \frac{3-i}{1+i} \quad , \quad L = (3 - 2i)^2$

نبسط الجذور قبل جمعهما وضربهما

$m = \frac{3-i}{1+i}.\frac{1-i}{1-i} = \frac{3-3i-i+i^2}{(1)^2+(1)^2}$

$= \frac{3-4i-1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{4i}{2} \Rightarrow m = 1 - 2i$

$L = (3 - 2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 9 - 12i - 4 \Rightarrow L = 5 - 12i$

$m + L = (1 - 2i) + (5 - 12i) = 6 - 14i$

$m.L = (1 - 2i).(5 - 12i) = 5 - 12i - 10i + 24i^2 = 5 - 22i - 24 = -19 - 22i$

∴ $x^2 -$ (مجموع الجذرين) $x +$ حاصل ضرب الجذرين $= 0$

$x^2 - (6 - 14i)x + (-19 - 22i) = 0$

٣ – جد الجذور التربيعية للأعداد المركبة الآتية

a) $-6i$

نفرض الجذر التربيعي للعدد المركب $(-6i)$ هو $x+yi$

$(x+yi)^2 = -6i$

$x^2 + 2xy + y^2i^2 = 0 - 6i$

$(x^2 - y^2) + (2xy)i = 0 - 6i$

$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots\dots\dots (1)$

$2xy = -6 \Rightarrow y = \frac{-6}{2x} \Rightarrow y = \frac{-3}{x}$ نعوض في (١)

$x^2 - (\frac{-3}{x})^2 = 0 \Longrightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = 0\right] * x^2$

$x^4 - 9 = 0 \Longrightarrow (x^2+3)(x^2-3) = 0$

أما $x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3 \notin R$ يهمل

أو $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \mp\sqrt{3}$

عندما $x = \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{-3}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = -\sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i)$

عندما $x = -\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{-3}{-\sqrt{3}} \Rightarrow y = \sqrt{3} \Rightarrow (-\sqrt{3} + \sqrt{3}\,i)$

∴ الجذران هما $\{\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i\,,\ \sqrt{3} + \sqrt{3}\,i\}$

b) $7 + 24i$

نفرض ان الجذر التربيعي للعدد $7+24i$ هو $x+yi$

$\therefore (x+yi)^2 = 7 + 24i$

$x^2 + 2xyi + y^2i^2 = 7 + 24i \Longrightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = 7 + 24i$

$x^2 - y^2 = 7 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$

$2xy = 24 \Rightarrow y = \frac{24}{2x} \Rightarrow y = \frac{12}{x}$ نعوض في (١)

$x^2 - (\frac{12}{x})^2 = 7 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{144}{x^2} = 7\right] * x^2$

$x^4 - 144 = 7x^2 \Longrightarrow x^4 - 7x^2 - 144 = 0 \Longrightarrow (x^2 - 16)(x^2 + 9) = 0$

أما $x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 \notin R$ يهمل

أو $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Longrightarrow x = \mp 4$

عندما $x = 4 \Rightarrow y = \frac{12}{4} \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (4 + 3i)$

عندما $x = -4 \Rightarrow y = \frac{12}{-4} \Rightarrow y = -3 \Rightarrow (-4 - 3i)$

∴ الجذران هما $\{4 + 3i, -4 - 3i\}$

c) $\frac{4}{1-\sqrt{3}\,i}$

أولاً نبسط المقدار بأن نضربه بمرافق المقام لنجعله على الصيغة العادية للعدد المركب ومن ثم نستخرج الجذور التربيعية له

$\frac{4}{1-\sqrt{3}\,i} \cdot \frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{3}\,i} = \frac{4+4\sqrt{3}\,i}{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{4+4\sqrt{3}\,i}{4} = \frac{4}{4} + \frac{4\sqrt{3}\,i}{4} = 1 + \sqrt{3}\,i$

نفرض الجذر التربيعي للعدد $1+\sqrt{3}\,i$ هو $x+yi$

$\therefore (x+yi)^2 = 1 + \sqrt{3}\,i$

$x^2 + 2xyi + y^2i^2 = 1 + \sqrt{3}\,i \Longrightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = 1 + \sqrt{3}\,i$

$x^2 - y^2 = 1 \ \dots\dots\dots\ (1)$

$2xy = \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2x}$ نعوض في (١)

$x^2-(\frac{\sqrt{3}}{2x})^2=1 \Rightarrow \left[x^2-\frac{3}{4x^2}=1\right]*4x^2$

$\Rightarrow 4x^4-3=4x^2 \Longrightarrow 4x^4-4x^2-3=0 \Rightarrow (2x^2-3)(2x^2+1)=0$

اما $2x^2+1=0 \Rightarrow x^2=\frac{-1}{2} \notin R$ يهمل

او $2x^2-3=0 \Rightarrow 2x^2=3 \Rightarrow x^2=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\mp\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

عندما $x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

عندما $x=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=\frac{-1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$

∴ الجذران هما $\{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\ ,\ \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\}$

٤ – ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية وأحد جذريها هو

a) $\boldsymbol{i}$

∴ المعادلة ذات معاملات حقيقية

∴ الجذران مترافقان اذن الجذر الاخر هو $-i$

مجموع الجذرين : $(i)+(-i)=0$

حاصل ضرب الجذرين : $(i)(-i)=-i^2=1$

∴ x^2- (مجموع الجذرين)x + (حاصل ضرب الجذرين) $=0$

$x^2-(0)x+1=0 \Longrightarrow x^2+1=0$

b) $\boldsymbol{5-i}$

∴ الجذر الآخر هو $5+i$

مجموع الجذرين $=(5-i)+(5+i)=10$

حاصل ضرب الجذرين $=(5-i)(5+i)=(5)^2+(1)^2=25+1=26$

$x^2-($مجموع الجذرين$)\,x+$ حاصل ضرب الجذرين $=0 \Longrightarrow x^2-10x+26=0$

c) $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+3i}{4}}$

بما ان المعاملات حقيقية اذن الجذر الاخر هو $\frac{\sqrt{2}-3i}{4}$ وذلك لان المقام عدد حقيقي

اما اذا كان المقام عدد مركب او تخيلي فقط فيجب تبسيط المقدار اولا وذلك بضربه بمرافق المقام

مجموع الجذرين $=\left(\frac{\sqrt{2}+3i}{4}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}-3i}{4}\right)$

$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2})+(3-3)i}{4}=\frac{2\sqrt{2}+0i}{4}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

حاصل ضرب الجذرين $=\left(\frac{\sqrt{2}+3i}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}-3i}{4}\right)$

$=\frac{(\sqrt{2})^2+(3)^2}{16}=\frac{2+9}{16}=\frac{11}{16}$

∴ $x^2-($مجموع الجذرين$)\,x+$ حاصل ضرب الجذرين $=0$

$x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{11}{16}=0$

٥– وزاري/ إذا كان $3+i$ هو احد جذري المعادلة $x^2-ax+(5+5i)=0$ فما قيمة a؟ وما هو الجذر الآخر؟

نفرض ان الجذر الآخر هو $a+bi$

∵ $x^2-ax+(5+5i)=0$

بالمقارنة مع $x^2-($مجموع الجذرين$)\,x+$ حاصل ضرب الجذرين $=0$

بقسمة طرفي المعادلة على $(3+i)$ ∴ حاصل ضرب الجذرين $=(5+5i) \Longrightarrow ∴ (3+i)(a+bi)=5+5i$



$a + bi = \frac{5+5i}{3+i} \Rightarrow a + bi = \frac{5+5i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i}$

$a + bi = \frac{15-5i+15i-5i^2}{9+1} \Rightarrow a + bi = \frac{15+10i+5}{10}$

$a + bi = \frac{20}{10} + \frac{10i}{10} \Rightarrow a + bi = 2 + i$

∴ الجذر الآخر هو $(2+i)$

∴ قيمة (a) هي مجموع الجذرين $a = (3+i) + (2+i) \Leftarrow a = 5 + 2i$

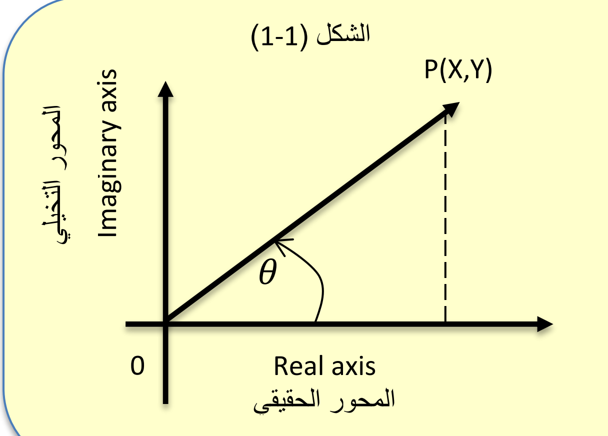
س: وزاري / اذا كان $2+4i$ أحد جذري المعادلة $2x^2 - xb - 2x + c - 6 = 0$ ، جد قيمتي $b, c \in R$

التمثيل الهندسي للأعداد المركبة

Geometric Representation of Complex Numbers.

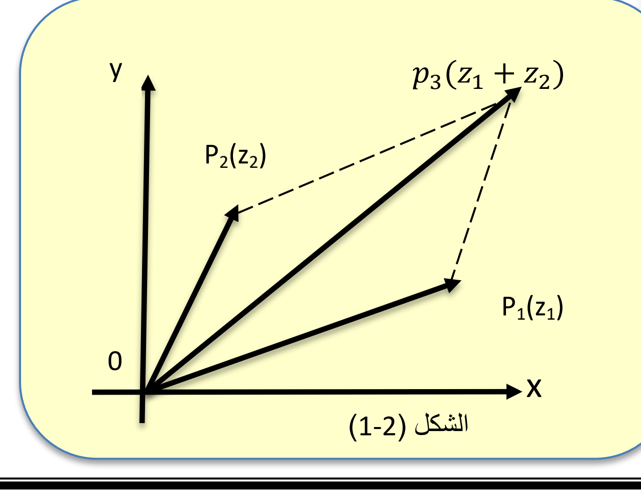
إذا كان E^2 أو R^2 يمثل المستوى الأقليدي المتعامد المحورين، فإنه بإقران كل عدد مركب $x+yi$ $(x, y \in R$حيث$)$ بالنقطة (X, Y) في E^2 نحصل على تطبيق تقابل من $\mathbb{C}$ الى R^2 وفي هذا المستوي سنمثل هندسياً بعض العمليات الجبرية البسيطة في الجمع والطرح في $\mathbb{C}$ والتي تقابل هندسياً العمليات في E^2 أو R^2).

سوف نتناول في هذا البند والبنود اللاحقة تمثيل بعض العمليات على الاعداد المركبة هندسياً والتي سنطلق على الأشكال التي تمثلها أشكال أرجاند نسبة إلى العالم (J.R. Argand, 1768– 1822) وسمي المستوي باسم العالم الألماني الشهير غاوس، بمستوى غاوس (C.F.Gauss 1777–1855) أو بشكل مبسط المستوى المركب (Complex plane). إذ يسمى المحور السيني (X–axis) بالمحور الحقيقي حيث يمثل عليه الجزء الحقيقي للعدد المركب أما المحور الصادي (y–axis) فيطلق عليه اسم المحور التخيلي والذي



يمثل عليه الجزء التخيلي للعدد المركب، وبالتالي فإن العدد المركب $x+yi$ يمثل هندسياً بالنقطة (X,Y) لاحظ الشكل $(1-1)$.

لو كان $z_1=x_1+y_1i$ ، $z_2=x_2+y_2i$ عددان مركبان ممثلان بالنقطتين $(P_1(x_1,y_1)$ ، $P_2(x_2,y_2))$ فإن $Z_1+Z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$ ويمكن تمثيل z_1+z_2 بالنقطة $P_3(x_1+x_2 \ , \ y_1+y_2)$ مستخدمين المعلومات المتعلقة بالمتجهات كما في الشكل $(1-2)$ أي أن $\overrightarrow{0p_1} + \overrightarrow{0p_2} = \overrightarrow{0p_3}$



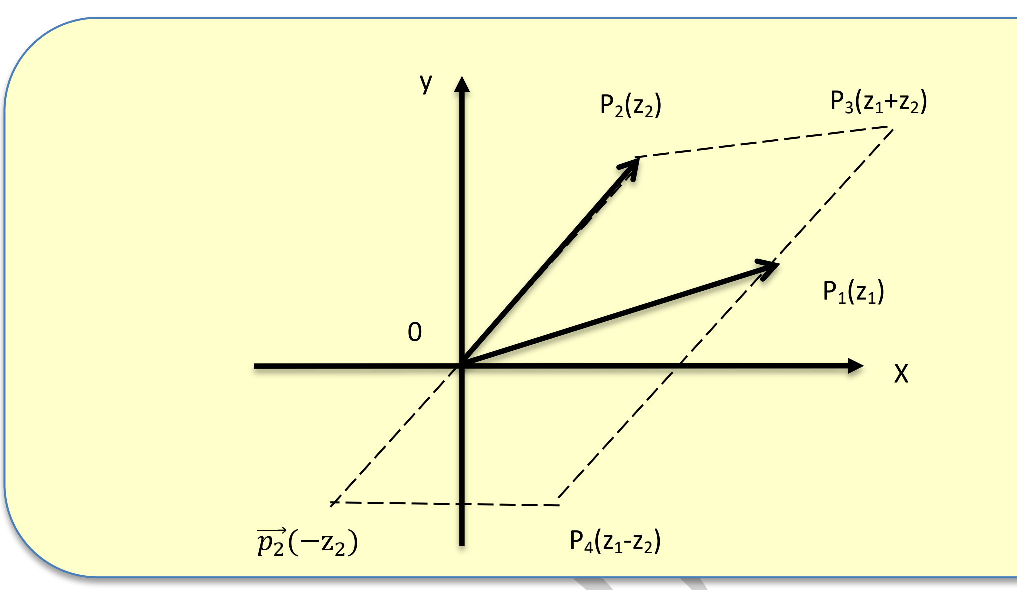
ان العدد المركب x+yi يمكن تمثيله بالمتجه $\overrightarrow{0p}$ وعليه يكون جمع عددين مركبين هو جمع متجهين.

إذا اعتبرنا $\overrightarrow{p_2}$ يمثل العدد المركب z_2 فإن $\overrightarrow{p_2}$ هي ناتجة من دوران $\overrightarrow{0p_2}$ حول 0 نصف دورة وعليه فإن: $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$ والذي يقترن بالنقطة P_4 حيث $0P_1P_4P_2$ يشابه متوازي الأضلاع $0p_1p_3p_2$ كما في الشكل $(1-3)$.

ملاحظة:

١- ليكن k عدد حقيقي لا يساوي الصفر، z عدد مركب فإن النقطة التي تمثل kz يمكن الحصول عليها بواسطة التكبير الذي مركزه 0 ومعامله الثابت k.

٢- لكل عدد مركب z فإن النقطة iz يمكن الحصول عليها من دوران ربع دورة عكس عقارب الساعة.

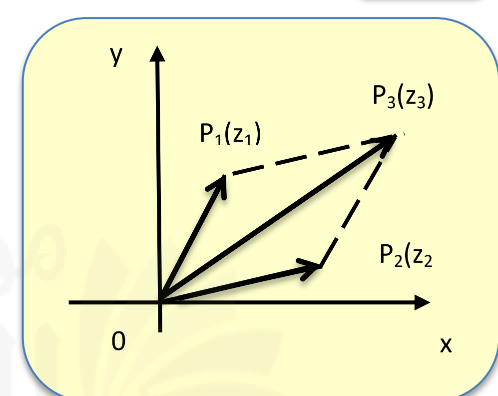


مثال

مثل العمليات الاتية هندسيا في شكل أرجاند

$(\boldsymbol{a})\ (\mathbf{3+4}\boldsymbol{i}) + (\mathbf{5+2}\boldsymbol{i})$

$$(3+4i)+(5+2i)=(3+5)+(4+2)i$$
$$=8+6i$$
$$z_1=3+4i \Rightarrow p_1(z_1)=(3,4)$$
$$z_2=5+2i \Rightarrow p_2(z_2)=(5,2)$$
$$z_3=8+6i \Rightarrow p_3(z_3)=(8,6)$$



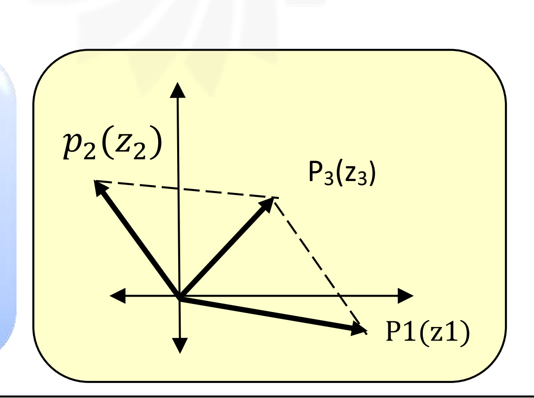
ملاحظة:

$\overrightarrow{0p_1}+\overrightarrow{0p_2}=\overrightarrow{0p_3}$ وهو يشبه جميع المتجهات يتكون الشكل $0p_1p_2p_3$ هو متوازي أضلاع قطره هو $\overrightarrow{0p_3}$

$(\boldsymbol{b})\ (\mathbf{6-2}\boldsymbol{i}) - (\mathbf{2-5}\boldsymbol{i})$

نحول عملية الطرح إلى جمع مع أخذ النظير الجمعي للعدد المركب الثاني

$$(6-2i)+(-2+5i)=(6-2)+(-2+5)i=4+3i$$
$$z_1=6-2i \Rightarrow p_1(z_1)=(6,-2)$$
$$z_2=-2+5i \Rightarrow p_2(z_2)=(-2,5)$$
$$z_3=4+3i \Rightarrow p_3(z_3)=(4,3)$$



تمارين [1 − 3]

١–أكتب النظير الجمعي لكل من الأعداد الآتية ثم مثل هذه الأعداد ونظائرها الجمعية على شكل ارجاند.

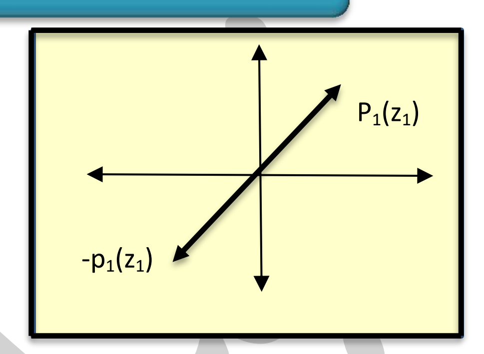
(a) $z_1 = 2 + 3i$

ملاحظة: النظير هو تغيير إشارة العدد الحقيقي والتخيلي معاً

النظير الجمعي $(-z) = -2 - 3i$

$z_1 = 2 + 3i \Rightarrow p_1(z_1) = (2,3)$

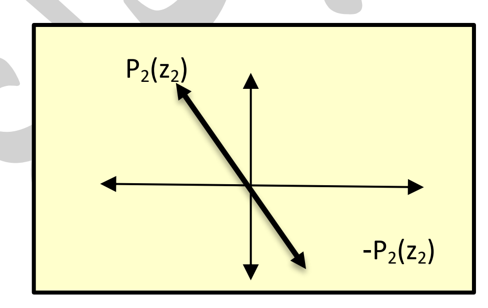
$-z_1 = -2 - 3i \Rightarrow p_1(-z_1) = (-2,-3)$



(b) $z_2 = -1 + 3i$

$z_2 = -1 + 3i \Rightarrow p_2(z_2) = (-1,3)$

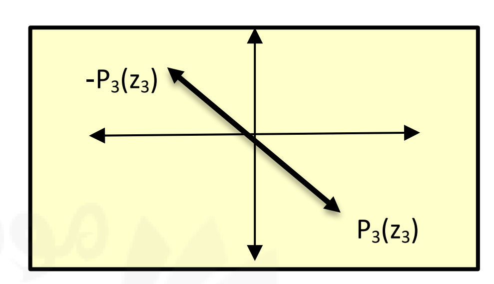
$-z_2 = 1 - 3i \Rightarrow p_2(-z_2) = (1,-3)$



(c) $z_3 = 1 - i$

$z_3 = 1 - i \Rightarrow p_3(z_3) = (1,-1)$

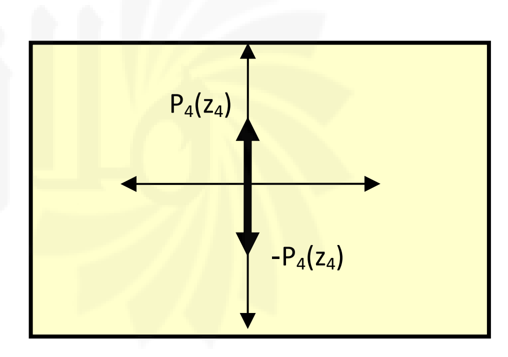
$-z_3 = -1 + i \Rightarrow p_3(-z_3) = (-1,1)$



(d) $z_4 = i$

$z_4 = 0 + i \Rightarrow p_4(z_4) = (0,1)$

$-z_4 = 0 - i \Rightarrow p_4(-z_4) = (0,-1)$

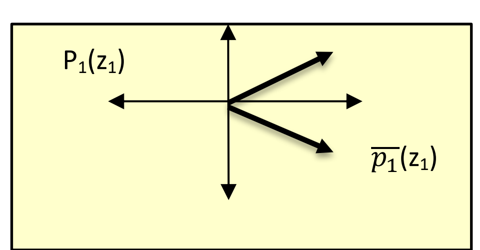


٢ – أكتب العدد المرافق لكل من الأعداد الآتية ثم مثل الأعداد ومرافقاتها على شكل ارجاند

(a) $z_1 = 5 + 3i$

$z_1 = 5 + 3i \Longrightarrow p_1(z_1) = (5,3)$

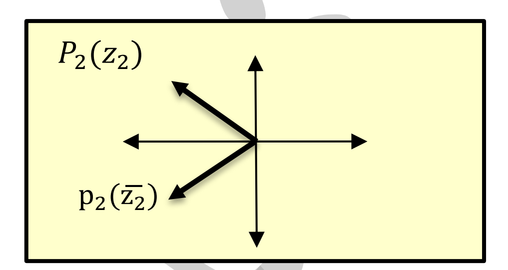
$\overline{z_1} = 5 - 3i \Longrightarrow p_1(\overline{z_1}) = (5,-3)$



(b) $z_2 = -3 + 2i$

$z_2 = -3 + 2i \Rightarrow p_2(z_2) = (-3,2)$

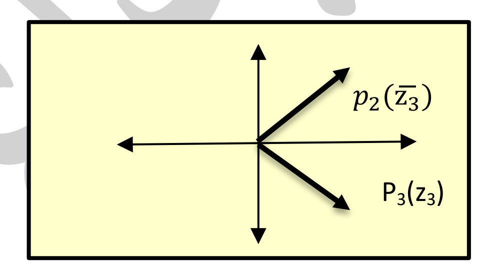
$\overline{z_2} = -3 - 2i \Rightarrow p_2(\bar{z}_2) = (-3,-2)$



(c) $z_3 = 1 - i$

$z_3 = 1 - i \Rightarrow p_3(z_3) = (1,-1)$

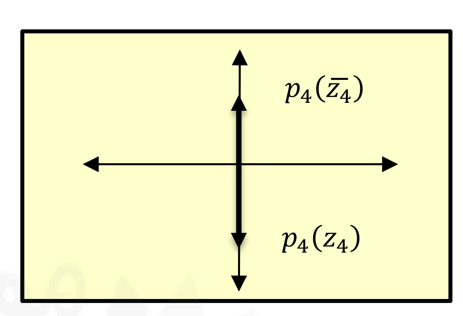
$\overline{z_3} = 1 + i \Rightarrow p_3(\overline{z_3}) = (1,1)$



(d) $z_4 = -2i$

$z_4 = 0 - 2i \Rightarrow p_4(z_4) = (0,-2)$

$\overline{z_4} = 0 + 2i \Rightarrow p_4(\overline{z_4}) = (0,2)$

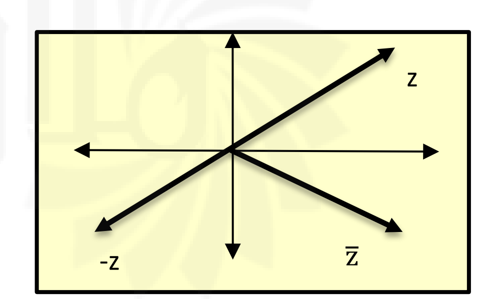


٣ – إذا كان $z = 4 + 2i$ وضح على شكل أرجاند كلاً من : $z\ ,\ \overline{z}\ , -z$

$z = 4 + 2i \Rightarrow p(z) = (4,2)$

$\overline{z} = 4 - 2i \Rightarrow p(\overline{z}) = (4,-2)$

$-z = -4 - 2i \Rightarrow p(-z) = (-4,-2)$





٤- إذا كان $z_1 = 4 - 2i$, $z_2 = 1 + 2i$ وضح على شكل ارجاند كل من $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $2z_1$, $-3z_2$

$-3z_2 = -3(1+2i) = -3 - 6i$

$p(-3z_2) = (-3,-6)$

$2z_1 = 2(4-2i) = 8 - 4i$

$p(2z_1) = (8,-4)$

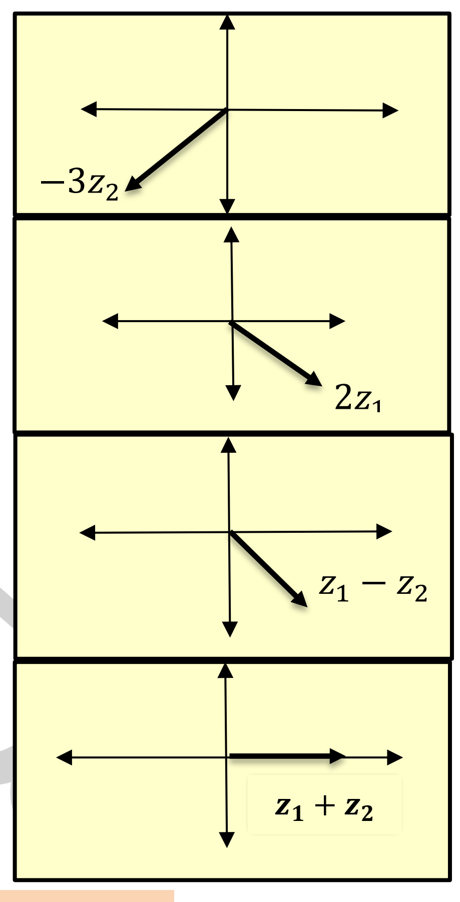
$z_1 - z_2 = (4-2i) - (1+2i)$

$= (4-2i) + (-1-2i) = 3 - 4i$

$p(z_1 - z_2) = (3,-4)$

$z_1 + z_2 = (4-2i) + (1+2i) = 5 + 0i$

$p(z_1 + z_2) = (5,0)$



الصيغة القطبية للعدد المركب (polar form):

في البنود السابقة درسنا العدد المركب بصيغته الجبرية $z = x + yi$ والديكارتية $z = (x, y)$ وفي هذا البند سندرس صيغة أخرى للعدد المركب تدعى بالصيغة القطبية، وتحويل أحدهما إلى الأخرى.

فلو كان لدينا العدد المركب $z = x + yi$ ومثلناه بالنقطة $p(x, y)$ كما في الشكل(6 – 1) فإن (r, θ) هما الاحداثيان القطبيان للنقطة P حيث O يمثل القطب و $\overrightarrow{Ox}$ يمثل الضلع الابتدائي،

وهذا يعني أن:

$r = \|\overrightarrow{op}\|$ وإن $\theta = m\measuredangle xop$ ويكون قياس θ من $\overrightarrow{ox}$ إلى $\overrightarrow{op}$ باتجاه عكس عقارب الساعة إذا كان القياس موجباً ومع اتجاه عقارب الساعة أذا كان القياس سالباً وعليه فإن:

$\text{R}(z) = x = r\cos\theta$ ……………(1)

$\text{I}(z) = y = r\sin\theta$………………(2)

y
p(x.y)
r
y
θ
0
x
x

حيث $R(z)$ يرمز للجزء الحقيقي للعدد المركب z بينما $\text{I}(z)$ يرمز للجزء التخيلي للعدد المركب z ، r يسمى مقياس العدد المركب z.

وهو عدد حقيقي غير سالب ويقرأ (mod z) أو مقياس z ويرمز له $\|Z\|$ حيث $r = \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ومن العلاقتين (1) و (2) نحصل على

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\|z\|}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\|z\|}$$

أما θ فقياسها يسمى سعة العدد المركب واختصاراً تكتب $\theta = \arg(z)$

ملاحظة: يمكن ان تأخذ θ عدداً غير منتهي من القيم التي تختلف كل منها عن الأخرى لعدد صحيح من الدورات فإذا كانت θ سعة عدد مركب فإن كل من الأعداد $\theta + 2n\pi$ حيث n عدد صحيح يكون أيضاً سعة لنفس العدد المركب. أما إذا كانت $\theta \in [o, \pi]$ الدالة على سعة العدد المركب فيقال لها القيمة الأساسية لسعة العدد المركب.

مثال إذا كان $z = 1 - \sqrt{3}\, i$ جد المقياس والقيمة الأساسية لسعة z.

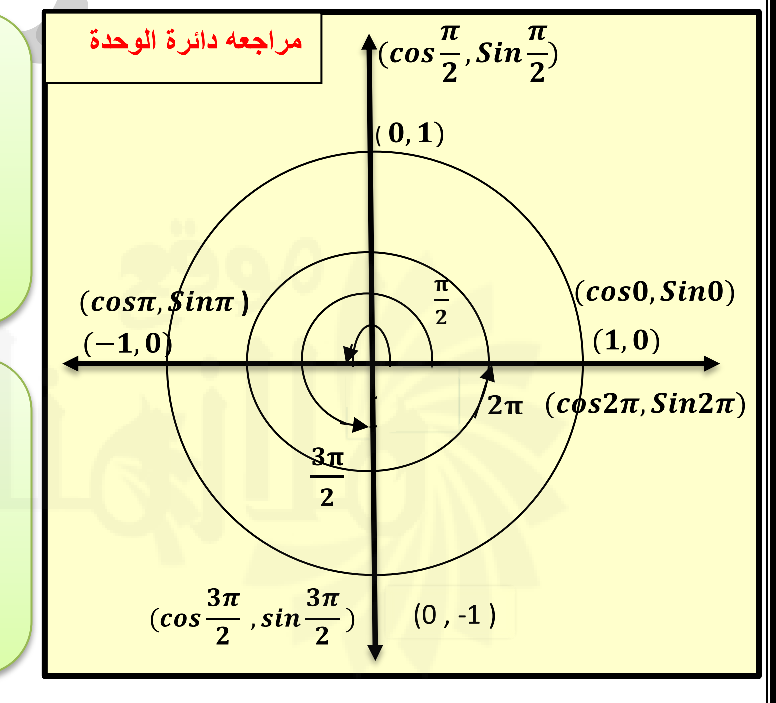
$$r = mod\ z = \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

(حيث x هو الجزء الحقيقي للعدد المركب، y هو الجزء التخيلي للعدد المركب).

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{\|z\|} = \frac{1}{2}\\ \sin\theta &= \frac{y}{\|z\|} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

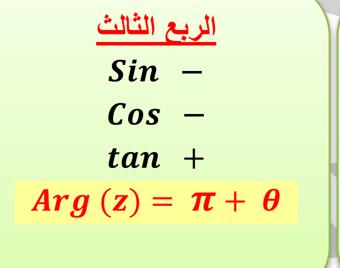
Sin سالب و cos موجب اذن الزاوية تقع في الربع الرابع

$$\therefore \arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$



الربع الأول
$Sin\ +$
$Cos\ +$
$tan\ +$
$Arg\ (z) = \theta$

الربع الثاني
$Sin\ +$
$Cos\ -$
$tan\ -$
$Arg\ (z) = \pi - \theta$



الربع الثالث
$Sin\ -$
$Cos\ -$
$tan\ +$
$Arg\ (z) = \pi + \theta$

الربع الرابع
$Sin\ -$
$Cos\ +$
$tan\ -$
$Arg\ (z) = 2\pi - \theta$

مثال إذا كان $z = -1 - i$ جد المقياس والقيمة الأساسية لسعة z

$x = -1 \quad , \quad y = -1$

$r = mod\ z = \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

∴ θ تقع في الربع الثالث.

$\therefore \arg(z) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

ملاحظة:

١ – أذا كانت سعة العدد المركب $z = 0$ غير معرفة وذلك لأن المتجه صفري ليس له اتجاه.

٢- ممكن الإفادة من المقياس والقيمة الأساسية لسعة العدد المركب بكتابة العدد $z = x + yi$ بصورة أخرى تسمى الصيغة القطبية (*Polar from*) وكما يأتي:

$\because x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta$

$\therefore z = r\cos\theta + i\, r\sin\theta$

$\therefore z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

أو $z = \|z\|(\cos(arg z) + i\sin(arg z))$

مثال عبر عن كل من الأعداد الآتية بالصيغة القطبية:

(a) $-2 + 2i$

$r = mod\ z = \|z\| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

∵ الزاوية تقع في الربع الثاني:

$\therefore arg\ (z) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - \pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

الصيغة القطبية للعدد المركب هي

$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 2\sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

(b) $z = 2\sqrt{3} - 2i$

$r = mod\ z = \|z\| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$

$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

∵ الزاوية تقع في الربع الرابع

$\therefore \arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi - \pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \therefore z = 4\,(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})$

مثال

عبر عن كل من الأعداد الآتية بالصيغة القطبية:

(a) 1

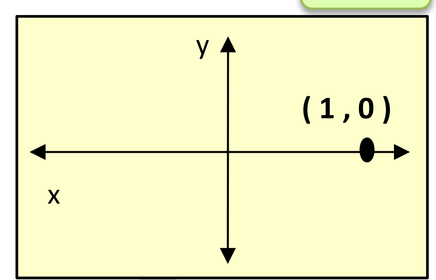
$p(z_1) = (1,0) = 1 + 0i$

$mod\ z_1 = \sqrt{(1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1} = 1$

$\arg(z) = 0$

الصيغة القطبية هي

$z_1 = 1(coso + i\ sin0)$



(b) i

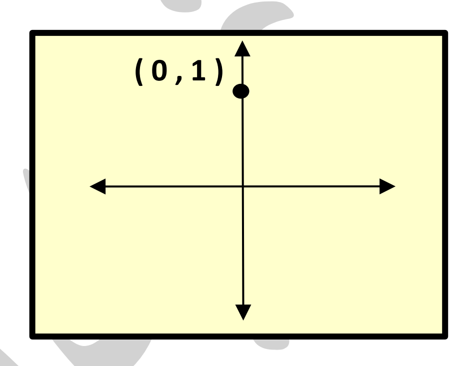
$p\ (z_2) = (0,1) = 0 + i$

$mod\ z_2 = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = \sqrt{1} = 1$

$org\ z = \frac{\pi}{2}$

الصيغة القطبية هي

$z_2 = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\ sin\ \frac{\pi}{2})$



(c) -1

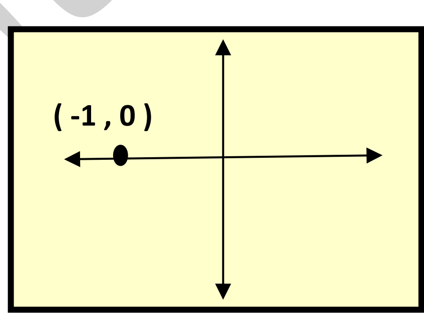
$p(z_3) = (-1,0) = -1 + 0i$

$mod\ z_3 = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1} = 1$

$\arg(z_3) = \pi$

الصيغة القطبية هي

$z_3 = 1(\cos\pi + i\sin\pi\ )$



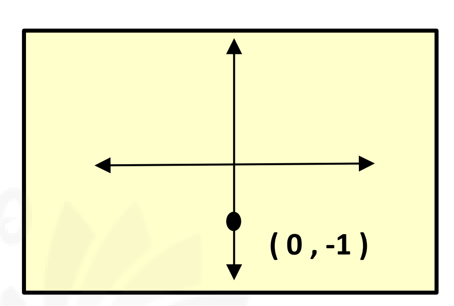
(d) $-i$

$p(z_4) = (0,-1) = 0 - i$

$mod\ z_4 = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

$\arg z_4 = \frac{3\pi}{2}$

الصيغة القطبية هي $z_4 = 1(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$



ملاحظة: من المثال السابق نستنتج ان

$i = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ $\quad$ $1 = (\cos\ 0 + i\sin\ 0)$

$-i = (\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$ $\quad$ $-1\ = (\cos\pi + isin\ \pi\ )$

أمثلة

$\mathbf{3} = 3 * 1 = 3(\cos 0 + i\ sin\ 0)$

$\mathbf{-2} = 2 * -1 = 2\ (cos\pi + i\ sin\ \pi)$

$\mathbf{5i} = 5 * i = 5\ (\cos\frac{\pi}{2} + \ i\sin\frac{\pi}{2})$

$\mathbf{-7i} = 7 * -i = 7\ (\cos\frac{3\pi}{2} + i\ sin\ \frac{3\pi}{2})$

(مـبـرهـنـة ديـمـوافـر)

z_2, z يمكن ان تكتب بصورة $z = cos\theta + i\sin\theta \qquad z_2 = \cos\phi + isin\,\phi,$

والآن ستجد $Z_1 . Z_2$ بالصيغة القطبية

$$z_1 \times z_2 = (cos\theta + i\,sin\theta)(cos\phi + i\sin\phi)$$
$$= cos\,\theta\,cos\,\phi + icos\theta\sin\phi + i\,sin\,\theta cos\phi + i^2 sin\theta\,sin\phi$$
$$= [cos\theta cos\phi - sin\theta sin\phi] + i[cos\theta sin\phi + \sin\theta\cos\phi] = \cos(\theta + \phi) + i\,sin(\theta + \phi)$$

ولو كان $(\phi = \theta)$ فإن العلاقة تصبح $(cos\theta + i\,sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

ويمكن برهنتها كما يأتي:

$$LHS = (cos\theta + i\,sin\theta)^2 = (cos^2\theta + 2i\,sin\theta cos\theta - sin^2\theta)$$
$$= (cos^2\theta - sin^2\theta) + i\,(2sin\theta cos\theta)$$
$$= cos2\theta + isin2\theta = RHS$$

وقد توصل العالم ديموافر إلى تعميم العلاقة والتي سميت بمبرهنة ديموافر

تعريف: لكل $n \in N$, $\theta \in \mathbb{R}$ فإن $(cos\theta + isin\theta)^n = \cos n\theta + i\,sin\,n\theta$

١) لنعتبر n=1 فإن العلاقة تصبح

$(cos\theta + i\,sin\theta)^1 = \cos 1\theta + isin\,1\theta$ وهي عبارة صحيحة.

٢) لنأخذ $k \geq 1$ ونفترض ان العلاقة صحيحة لكل n=k

أي ان $(cos\theta + i\,sin\theta)^k = \cos k\theta + isin\,k\theta$ صحيحاً فرضاً.

٣) يجب ان نثبت ان العلاقة صحيحة عندما $n = k + 1$

$$\therefore (cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = (cos\theta + i\,sin\theta)^1(cos\theta + i\,sin\theta)^k$$
$$= (cos\theta + i\,sin\theta)(\cos k\theta + i\sin k\theta) = \cos(\theta + k\theta) + i\sin(\theta + k\theta) = \cos(k+1)\,\theta + i\,sin(k+1)\theta$$

وعليه فإذا كانت العلاقة صحيحة عند n أي $n = k, k \geq 1$ فهي كذلك صحيحة عند $n = k + 1$ وبواسطة الاستقراء الرياضي فإن المبرهنة تعتبر صحيحة لجميع قيم n.

مثال احسب $\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)^4$

على حسب تعريف المبرهنة نضرب الأس كعدد صحيح بالزاوية الأولى والثانية:

$$= (cos4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \;isin\,4\left(\frac{3\pi}{8}\right))$$
$$= cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2} = 0 + i(-1) = 0 - i = -i$$

مثال بين أن كل $n \in N$, $\theta \in \mathbb{R}$ فإن $(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta$

الطرف الأيسر $(\cos\theta - i\sin\theta)^n$

$\because$ $\sin\theta$ في الربع الرابع سالبة و $\cos\theta$ في الربع الرابع موجبة.

$\therefore$ نأخذ $(-\theta)$ للدالتين وتتحول إشارة $\sin$ إلى الموجب. $= [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^n$

نرمز $(-\theta)$ بالرمز $(\emptyset)$ $\therefore [\cos\emptyset + i\sin\emptyset]^n$

الآن ندخل n على الزوايا $= \cos n\emptyset + i\sin n\emptyset$

نرجع $\emptyset$ إلى $-\theta$ $= \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$

نأخذ إشارات الربع الرابع لـ cos , sin $\therefore \cos n\theta - i\sin n\theta$

$\therefore$ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

نتيجة مبرهنة ديموافر

لكل $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \theta$ فإن

$$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right]$$

حيث $k = 0, 1, 2, \dots\dots\dots, n-1$

مثال وزاري : أحسب باستخدام مبرهنة ديموافر $(1+i)^{11}$

أولاً : نستخرج الصيغة القطبية للعدد المركب بدون الأس:

$z = 1 + i$

$mod\ z = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ θ تقع بالربع الأول

$\therefore \arg(z) = \frac{\pi}{4}$

$\therefore z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ الصيغة القطبية

$z^{11} = (\sqrt{2})^{11}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^{11}$

$z^{11} = (2)^{\frac{11}{2}}(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4})$

$= (2)^{\frac{11}{2}}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

$= (2)^{5\frac{1}{2}}(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)$

$= (2^5)\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 32(-1+i) = -32 + 32i$ (تم توزيع $\sqrt{2}$ على داخل القوس)

ملاحظة: نرجع الزاوية $\frac{11\pi}{4}$ إلى قياسها الرئيسي

$$\frac{11\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore \frac{11\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

ملاحظة: $\cos, \sin$ للزاوية $3\frac{\pi}{4}$ تقع في الربع الثاني

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\frac{3\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

ملاحظة : $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) + i\sin(-\theta)$
$= \cos\theta - i\sin\theta$
(نأخذ إشارة الربع الرابع لـ sin و cos)
اذن بصورة عامة : $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = (\cos n\theta - i\sin n\theta)$

مثال حل المعادلة $x^3 + 1 = 0$ حيث $x \in \mathbb{C}$

يمكن كتابة (-1) بالصيغة القطبية $x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين او نرفع الطرفين الى مقلوب أس x : $x^3 = \cos\pi + i\sin\pi$

$$x = \sqrt[3]{\cos\pi + i\sin\pi} \Rightarrow x = (\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{1}{3}}$$

$$x = (\cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3})$$ حيث $k = 0,1,2$ نأخذ الاعداد الأصغر من 3 لانه جذر تكعيبي

عندما $k = 0 \Rightarrow x = (\cos\frac{\pi+2(0)\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2(0)\pi}{3})$

$$x = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) \Rightarrow x = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

عندما $k = 1 \Rightarrow x = (\cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3})$

$$x = (\cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}) \Rightarrow x = (\cos\pi + i\sin\pi) \Rightarrow x = (-1+0i) \Rightarrow x = -1$$

عندما $k = 2 \Rightarrow x = (\cos\frac{\pi+2(2)\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2(2)\pi}{3})$

$$x = (\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) \Rightarrow = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

نأخذ قيم sin و cos للزاوية القياسية $\frac{\pi}{3}$ و نحدد اشارة الربع من العدد 5 المضروب بالزاوية حيث $\frac{5\pi}{3} = 300$ تقع في الربع الرابع

$$S = \left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

مثال أوجد الصيغة القطبية للمقدار $(\sqrt{3} + i)^2$ ثم جد الجذور الخمسة له

نوجد الصيغة القطبية للعدد $z = \sqrt{3} + i$ بدون القوة

$$mod\ z = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$\therefore \arg(z) = \frac{\pi}{6}$ — θ تقع في الربع الأول

$z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ (الصيغة القطبية بدون الأس)

الآن نرفع الصيغة القطبية للاس2

$$z^2 = 2^2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^2$$

$$z^2 = 4(\cos 2(\frac{\pi}{6}) + i\sin 2(\frac{\pi}{6}))$$

لايجاد الجذور الخمسة نرفع الصيغة القطبية الى الاس (١/عدد الجذور) $(z^2)^{\frac{1}{5}} = (4)^{\frac{1}{5}}[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}]^{\frac{1}{5}}$

$$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}\right) \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

عندما $k = 0 \Rightarrow \sqrt[5]{4}(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2(0)k}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2(0)k}{5})$

$= \sqrt[5]{4}(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15})$ نضرب مقام البسط في مقام المقام

عندما $k = 1 \Rightarrow \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi+6\pi}{3}}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi+6\pi}{3}}{5}\right)$

$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$

عندما $k = 2 \Rightarrow \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5} + \sin\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi+12\pi}{3}}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi+12\pi}{3}}{5}\right)$

$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$

عندما $k = 3 \Rightarrow \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\frac{\frac{\pi+18\pi}{3}}{5} i\sin\frac{\frac{\pi+18\pi}{3}}{5}\right)$

$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$

عندما $k = 4 \Rightarrow \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\frac{\pi+24\pi}{3}}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi+24\pi}{3}}{5}\right)$

$= \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{25\pi}{15} + i\sin\frac{25\pi}{15}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

تمارين [1 − 4]

١ – أحسب ما يأتي

(a) $\left[\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24}\right]^4$

$= \cos4\left(\frac{5\pi}{24}\right) + i\sin4\left(\frac{5\pi}{24}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

(b) $\left[\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right]^{-3}$

نضرب الأس بالزاوية كعدد موجب مع تغيير اشارة الوسط

$= \cos3\left(\frac{7\pi}{12}\right) - i\sin3\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$= \cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

٢ – احسب باستخدام مبرهنة ديموافر ما يأتي

(a) $(1 - i)^7$

نفرض أن $z = 1 - i$

$mod z = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Big] \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$



$\therefore \arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi-\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

∴ الزاوية تقع في الربع الرابع

$z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$

$z^7 = (\sqrt{2})^7\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)^7$

$= (2^{\frac{1}{2}})^7\left(\cos 7\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin 7\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$

$= 2^{\frac{7}{2}}\left(\cos\frac{49\pi}{4} + i\sin\frac{49\pi}{4}\right)$

$= 2^{3\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 8 + 8i$

$\frac{49\pi}{4} = \frac{48\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

$= 12\pi + \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{49\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

(b) $(\sqrt{3} + i)^{-9}$

$z = \sqrt{3} + i$ نفرض ان

$\therefore mod z = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{1}{2}\ \Big]\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \arg(z) = \frac{\pi}{6}$ θ تقع في الربع الأول

$\therefore z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ الصيغة القطبية

$z^{-9} = (2)^{-9}\,(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^{-9} = \frac{1}{512}\,(\cos 9\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin 9(\frac{\pi}{6}))$

$= \frac{1}{512}\left(\cos\frac{3\pi}{2} - i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{512}(0 - (-1)i) = \frac{1}{512}(0 + i) = \frac{i}{512}$

٣- بسط ما يأتي:

a) $\frac{(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^3}$

ملاحظة: حتى نقسم البسط على المقام يجب توحيد الزوايا أولاً.

$= \frac{[(\cos\theta + i\sin\theta)^2]^5}{[(\cos\theta + i\sin\theta)^3]^3}$

∴ نسحب القيمة المضروبة في الزاوية ونرفعها أس للمقدار

$= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^9}$

عند القسمة تطرح الأسس

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^{10-9}$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^1$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)$

b) $(\cos\theta + i\sin\theta)^8(\cos\theta - i\sin\theta)^4$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^8\ [(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1}]^4$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^8\,(\cos\theta + i\sin\theta)^{-4}$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^{8+(-4)}$ عند الضرب تجمع الأسس

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^4$

$= \cos 4\theta + i\sin 4\theta$

نسحب الإشارة السالبة من المقدار الثاني

فتتحول إلى أس سالب حسب مبرهنة ديموافر

٤- جد الجذور التربيعية للعدد $(-1+\sqrt{3}i)$ باستخدام مبرهنة ديموافر ثم الطريقة المعروضة في البند **[1-4]**

$$let\ z=-1+\sqrt{3}i \Rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-1}{2}\quad ,\quad sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$$

الزاوية تقع في الربع الثاني

$$\therefore argz=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

$$z=r(cos\theta+i\,sin\theta)\Rightarrow z=2\left(cos\frac{2\pi}{3}+i\,sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z^{\frac{1}{2}}=(2)^{\frac{1}{2}}[cos\frac{2\pi}{3}+i\,sin\frac{2\pi}{3}]^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\sqrt{2}\,[cos\frac{2\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}+\ i\,sin\frac{2\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\ ]\ \Rightarrow k=0,1$$

عندما $k=0\Rightarrow\ z=\sqrt{2}\left[cos\frac{2\frac{\pi}{3}}{2}+i\,sin\frac{2\frac{\pi}{3}}{2}\right]$

$$z=\sqrt{2}\ \left[cos\frac{2\pi}{6}+i\,sin\frac{2\pi}{6}\right]\Rightarrow\sqrt{2}\ \left(cos\frac{\pi}{3}+\ i\,sin\frac{\pi}{3}\right)\ \Rightarrow\ \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

عندما $k=1\Rightarrow\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\frac{\pi}{3}+2\pi}{2}+i\,sin\frac{2\frac{\pi}{3}+2\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\left(cos\frac{8\pi}{6}+i\,sin\frac{8\pi}{6}\right)$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right)\Rightarrow\sqrt{2}\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

الطريقة الثانية

نفرض الجذر التربيعي للعدد $(-1+\sqrt{3}i)$ هو $x+yi$

بتربيع الطرفين

$$x+yi=\sqrt{-1+\sqrt{3}\,i}$$

$$x^2+2xyi+y^2i^2=1+\sqrt{3}i\Rightarrow(x^2-y^2)+(2xy)i=-1+\sqrt{3}i$$

$$x^2-y^2=-1.........(1)$$

$2xy=\ \sqrt{3}\ \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2x}.....(2)$ نعوض (٢) في (١)

$$x^2-(\frac{\sqrt{3}}{2x})^2=-1$$

$$x^2-\frac{3}{4x^2}=-1]*4x^2$$

$$4x^4-3=-4x^2\ \Rightarrow 4x^4+4x^2-3=0$$

$$(2x^2+3)(2x^2-1)=0$$

تهمل $\notin R$

$$2x^2-1=0\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

عندما $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\Rightarrow(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i)$

عندما $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2(\frac{-1}{\sqrt{2}})}\Rightarrow y=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\ \Rightarrow(\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i)$

$$s=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i\,,\ \frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i\right\}$$

٥ - باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد $27i$

نفرض $z = 0 + 27i$

$$mod\ z = \sqrt{(0)^2 + (27)^2} = 27$$

$$\left.\begin{array}{l} cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{0}{27} = 0 \\ sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{27}{27} = 1 \end{array}\right] \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \arg(z) = \frac{\pi}{2}$$

الصيغة القطبية

$$z = r(cos\theta + i\ sin\theta)$$

$$z = 27(cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

يمكن ايجاد الصيغة القطبية بالطريقة الاعتيادية

أو يمكن ايجادها مباشرة حسب الملاحظة

$$z = 27i = 27(i)$$

$$= 27(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

لايجاد الجذور التكعيبيه نرفع الصيغة القطبية الى (١/ عدد الجذور) أي $\frac{1}{3}$

$$\therefore z^{\frac{1}{3}} = (27)^{\frac{1}{3}}(cos\frac{\pi}{2} + i\ sin\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{3}} = 3\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\ sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\ , k = 0, 1, 2$$

عندما $k = 0 \Rightarrow 3\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3} + i\ sin\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3}\right) = 3\left(cos\frac{\pi}{6} + i\ sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

عندما $k = 1 \Rightarrow 3\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\ sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right) = 3\left(cos\frac{\frac{\pi+4\pi}{2}}{3} + i\ sin\frac{\frac{\pi+4\pi}{2}}{3}\right)$

$= 3\left(cos\frac{5\pi}{6} + i\ sin\frac{5\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ (الزاوية تقع في الربع الثاني)

عندما $k = 2 \Rightarrow \left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\ sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right) = 3\left(cos\frac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3} + i\ sin\frac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3}\right)$

$$= \left(cos\frac{9\pi}{6} + i\ sin\frac{9\pi}{6}\right) = 3\left(cos\frac{3\pi}{2} + i\ sin\frac{3\pi}{2}\right) = 3(0 - i) = 0 - 3i = -3i$$

$$S = \left\{3\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\ , \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\ , -3i\right\}$$

٦- جد الجذر الرابع للعدد (16-) باستخدام مبرهنة ديموافر.

نفرض $z = -16$

$$z = 16(-1)$$

الصيغة القطبية

$$\therefore z = 16(cos\pi + i\ sin\pi)$$

$$\therefore z^{\frac{1}{4}} = (16)^{\frac{1}{4}}(cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{1}{4}}$$

$= 2\left(cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\ sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$ حيث $k = 0, 1, 2, 3$

عندما $k = 0 \Rightarrow 2\left(cos\frac{\pi}{4} + i\ sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

عندما $k = 1 \Rightarrow 2\left(cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\ sin\frac{\pi+2\pi}{4}\right)$

$= 2\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\ sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

(الزاوية تقع في الربع الثاني)

حيث 3 x 45 =135

عندما k=2$\Rightarrow 2\left(cos\frac{\pi+4\pi}{4} + i\ sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right)$

$= 2\left(cos\frac{5\pi}{4} + i\ sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

(الزاوية تقع في الربع الثالث)

حيث 5 x 45 = 225

عندما $k=3 \Longrightarrow 2\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$s = \{\sqrt{2}+\sqrt{2}i, -\sqrt{2}+\sqrt{2}i, -\sqrt{2}-\sqrt{2}i, \sqrt{2}-\sqrt{2}i\}$

(الزاوية تقع في الربع الرابع)

حيث $7 \times 45 = 315$

٧ - أوجد قيم $(-64i)^{\frac{1}{6}}$ باستخدام مبرهنة ديموافر

نفرض $z = -64i$

$z = 64(-i)$

$z = 64\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$z^{\frac{1}{6}} = (64)^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$

$= 2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{6}\right)$ $\quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$k = 0 \Longrightarrow 2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+0}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+0}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{12} + i\sin\frac{3\pi}{12}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

عندما $k = 1 \Longrightarrow 2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{\frac{3\pi+4\pi}{2}}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi+4\pi}{2}}{6}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

عندما $k = 2 \Longrightarrow 2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{\frac{3\pi+8\pi}{2}}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi+8\pi}{2}}{6}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$

عندما $k = 3 \Longrightarrow 2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+6\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+6\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{\frac{3\pi+12\pi}{2}}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi+12\pi}{2}}{6}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i\sin\frac{15\pi}{12}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

عندما $k = 4 \Longrightarrow 2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+8\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+8\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{\frac{3\pi+16\pi}{2}}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi+16\pi}{2}}{6}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$

عندما $k = 5 \Longrightarrow 2\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+10\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+10\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{\frac{3\pi+20\pi}{2}}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi+20\pi}{2}}{6}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$

أسئلة خارجية

س/ باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد i.

$x^3 = i$

$\therefore x^3 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ $\quad$ (بالجذر التكعيبي للطرفين)

$x = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$x = \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)$ $\quad k = 0,1,2$

عندما $k=0 \implies x=\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3}\right)=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

عندما $k=1 \implies x=\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right)=\left(\cos\frac{\frac{\pi+4\pi}{2}}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi+4\pi}{2}}{2}\right)$

$=\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

عندما $k=2 \implies \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right)=\left(\cos\frac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3}\right)$

$=\left(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}\right)=\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=0-i=-i$

س/ حل المعادلة $x^{\frac{-5}{2}}=\sqrt{3}+i$

ملاحظة: حتى نتخلص من اس المتغير نرفع الطرفين الى مقلوب اس المتغير بنفس الاشارة $\left(\frac{-2}{5}\right)$

$\left(x^{\frac{-5}{2}}\right)^{\frac{-2}{5}}=(\sqrt{3}+i)^{\frac{-2}{5}}$

$x=(\sqrt{3}+i)^{\frac{-2}{5}}$

Let $z=\sqrt{3}+i$

$\therefore mod\ z=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=\sqrt{4}=2$

$\cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{1}{2}\Big] \implies \theta=\frac{\pi}{6}$

$\therefore \arg(z)=\frac{\pi}{6}$

$z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ الصيغة القطبية

$z=(2)^{\frac{-2}{5}}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^{\frac{-2}{5}} \implies=(2^{-2})^{\frac{1}{5}}[(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^{-2}]^{\frac{1}{5}}$

$=(\frac{1}{4})^{\frac{1}{5}}[\cos 2\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right)]^{\frac{1}{5}} \implies=\frac{1}{\sqrt[5]{4}}[\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}]^{\frac{1}{5}}$

$=\frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}-i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}\right)$ $\quad k=0,1,2,3,4$

عندما $k=0 \implies \frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+0}{5}-i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+0}{5}\right)=\frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left(\cos\frac{\pi}{15}-i\sin\frac{\pi}{15}\right)$

عندما $k=1 \implies \frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}-i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}\right)=\frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left(\cos\frac{\frac{\pi+6\pi}{3}}{5}-i\sin\frac{\frac{\pi+6\pi}{3}}{5}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left(\cos\frac{7\pi}{15}-i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$

عندما $k=2 \implies \frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5}-i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5}\right)=\frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left(\cos\frac{\frac{\pi+12\pi}{3}}{5}-i\sin\frac{\frac{\pi+12\pi}{3}}{5}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left(\cos\frac{13\pi}{15}-i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$

عندما $k=3 \implies \frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5}-i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5}\right)=\frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left(\cos\frac{\frac{\pi+18\pi}{3}}{5}-i\sin\frac{\frac{\pi+18\pi}{3}}{5}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left(cos\frac{\frac{\pi+18\pi}{3}}{5} - i\ sin\frac{\frac{\pi+18\pi}{3}}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left(cos\frac{19\pi}{15} - i\ sin\frac{19\pi}{15}\right)$$

عندما $k = 4 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5} - i\ sin\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left(cos\frac{\frac{\pi+24\pi}{3}}{5} - i\ sin\frac{\frac{\pi+24\pi}{3}}{5}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left(cos\frac{25\pi}{15} - i\ sin\frac{25\pi}{15}\right) = \frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left(cos\frac{5\pi}{3} - i\ sin\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

س / حل المعادلة $\sqrt{x^3} - \sqrt{3} - i = 0$ بطريقة ديموافر حيث $x \in \mathbb{C}$

$\sqrt{x^3} = \sqrt{3} + i$ نجعل المتغيرات في طرف والثوابت في الطرف آخر

$$x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3} + i \Rightarrow (x^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = (\sqrt{3} + i)^{\frac{2}{3}}$$

Let $z = \sqrt{3} + i$

$$modz = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{aligned} cos\ \theta &= \frac{x}{\|z\|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{y}{\|z\|} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right] \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \arg z = \frac{\pi}{6}$$

$$z = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + i\ sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore x = (2)^{\frac{2}{3}}(cos\frac{\pi}{6} + i\ sin\frac{\pi}{6})^{\frac{2}{3}}$$

$$= (2^2)^{\frac{1}{3}}\left[\left(cos\frac{\pi}{6} + i\ sin\frac{\pi}{6}\right)^2\right]^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}\left[cos2\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\ sin\ 2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{4}\left[\ cos\frac{\pi}{3} + i\ sin\frac{\pi}{3}\right]^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3} + i\ sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}\right) \qquad \mathbf{k = 0, 1, 2}$$

عندما $k = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{4}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}+0}{3} + i\ sin\frac{\frac{\pi}{3}+0}{3}\right) = \sqrt[3]{4}\left(cos\frac{\pi}{9} + \ isin\frac{\pi}{9}\right)$

عندما $k = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{4}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{3} + i\ sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{3}\right)$

$$= \sqrt[3]{4}\left(cos\frac{\frac{\pi+6\pi}{3}}{3} + i\ sin\frac{\frac{\pi+6\pi}{3}}{3}\right) = \sqrt[3]{4}\left(cos\frac{7\pi}{9} + i\ sin\frac{7\pi}{9}\right)$$

عندما $k = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{4}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{3} + i\ sin\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{3}\right)$

$$= \sqrt[3]{4}\left(cos\frac{\frac{\pi+12\pi}{3}}{3} + i\ sin\frac{\frac{\pi+12\pi}{3}}{3}\right) = \sqrt[3]{4}\left(cos\frac{13\pi}{9} + i\ sin\frac{13\pi}{9}\right)$$

س/ جد الصيغة القطبية للعدد المركب $\frac{-1+7i}{3+4\,i}$

أولاً نبسط المقدار بضربه بالمرافق

$$\frac{-1+7i}{3+4i} * \frac{3-4i}{3-4i}$$

$$= \frac{-3+4i+21i-28i^2}{(3)^2+(4)^2} = \frac{(-3+28)+(4+21)i}{9+16} = \frac{25+25i}{25} = \frac{25}{25} + \frac{25}{25}i$$


07901311457

$\therefore z = 1 + i$

$mod(z) = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$sin\ \theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$org\ z = \frac{\pi}{4}$

$z = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\ sin\frac{\pi}{4}\right)$ الصيغة القطبية

س: إثرائي / جد حلول المعادلة في $\mathbb{C}$ باستخدام ديموافر $\mathbf{2z^4 + \sqrt{-3} = -1}$

واجب



الفصل الثاني (القطوع المخروطية)

لتكن (x_1,x_2) نقطة ثابتة في المستوي وليكن $ax + by + c = 0$ مستقيماً ثابتاً في المستوى نفسه، عندئذ مجموعة كل النقاط التي نسبة بعد كل منها عن النقطة (x_1,y_1) إلى بعدها عن المستقيم $ax + by + c = 0$ تساوي عدد ثابتاً (e) تكون شكل هندسي يسمى بالقطع المخروطي.

مما سبق نلاحظ أن لكل قطع مخروطي ثلاثة مفاهيم أساسية يتعين بها هي:

١. النقاط الثابتة (x_1,y_1) تسمى بؤرة القطع المخروطي (Focus).

٢. المستقيم الثابت $ax + by + c = 0$ يسمى دليل القطع المخروطي (Directrix).

٣. النسبة (e) تسمى بالاختلاف المركزي (Eccentricity).

ملاحظة:

$e = 1$ في القطع المكافئ Parabola

$e < 1$ في القطع الناقص Ellipse

$e > 1$ في القطع الزائد Hyperbola

المعادلة العامة للقطع المخروطي

من تعريف القطع المخروطي نستنتج المعادلة العامة وذلك كما يأتي:

لتكن (x,y) نقطة على القطع المخروطي، عندئذ المسافة بين (x,y) والبؤرة (x_1,y_1) هي:

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

والبعد بين (x,y) والدليل $ax + by + c = 0$ هو $\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

وبموجب تعريف القطع المخروطي فإن النسبة بين هاتين المسافتين تساوي (e) أي ان

$$e = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}{\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = e * \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

وبتربيع الطرفين نحصل على معادلة القطع المخروطي العامة وهي معادلة من الدرجة الثانية.

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = e^2 * \frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$$

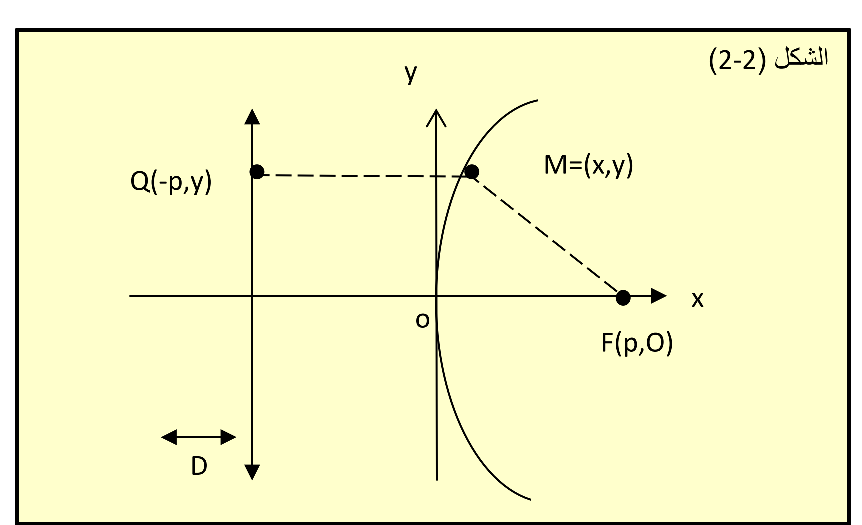
القطع المكافئ

القطع المكافئ : هو مجموعة النقط $M(x,y)$ في المستوي والتي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة $F(p,0)$ تسمى البؤرة حيث $P > 0$ مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم $\overleftrightarrow{(D)}$ يسمى الدليل لا يحوي البؤرة.

أي ان $Mf = MQ$ لاحظ الشكل (2-2):

وتسمى النقطة (O) برأس القطع المكافئ (Vertex).

ويسمى المستقيم (x) المار بالبؤرة والعامود على الدليل بمحور القطع المكافئ، حيث لاحظ ان $\frac{MF}{MQ} = e = 1$

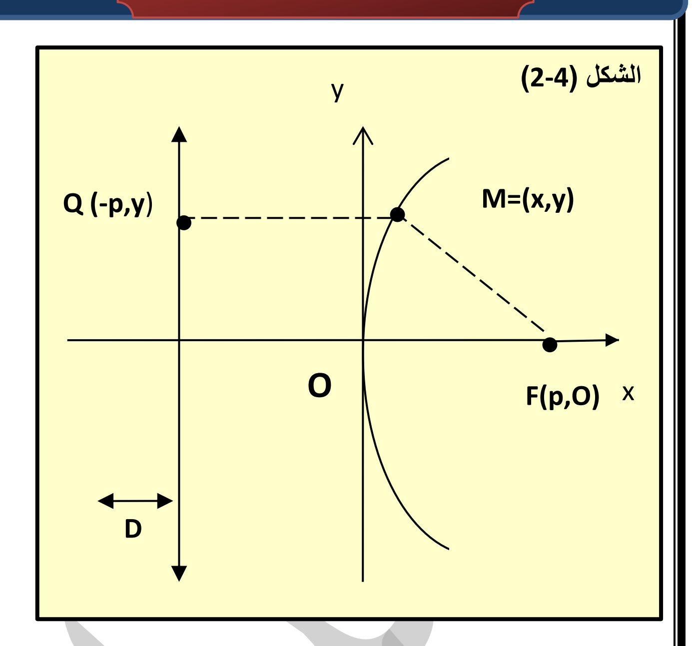


معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور السينات (x-axis) والرأس في نقطة الأصل

الشكل (2-3)

في المستوى الديكارتي المتعامد المحورين وبناءاً على تعريف القطع المكافئ يمكن إيجاد معادلة القطع المكافئ في ابسط صوره ممكنة وكما يأتي

لتكن النقطة $F(p,0)$ هي بؤرة القطع المكافئ والمستقيم D هو دليل القطع المكافئ، والنقطة $Q(-P,Y)$ نقطة على الدليل على حيث $\overline{MQ}$ عمودي على المستقيم D والنقطة $M(X,Y)$ من نقط منحني القطع المكافيء والرأس في نقطة الأصل $(0,0)$ كما في الشكل $(2-3)$ (B) من تعريف القطع المكافئ.



$$MF = MQ$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2}$$

$$\sqrt{x^2 - 2px + p^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2xp + p^2}$$

بتربيع الطرفين ينتج

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

(المعادلة القياسية للقطع المكافئ)

$\mathbf{y^2 = 4px \quad , \quad \forall p > 0}$

ومعادلة الدليل **x=-p**

مثال

جد البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ $y^2 = 8x$

بالمقارنة بالمعادلة القياسية $y^2 = 4px$

$4p = 8 \Rightarrow p = \frac{8}{4} \Rightarrow \quad p = 2$

∴ البؤرة هي $F(p,0) = F(2,0)$

$x = -p$ معادلة الدليل $\Rightarrow x = -2$

ملاحظة مهمة: أشارة معادلة القطع المكافئ دائماً مطابقة لاشارة البؤرة ومعاكسة لإشارة الدليل

مثال

جد معادلة القطع المكافئ إذا علم : أ) بؤرته $(3,0)$ والرأس نقطة الاصل.

ب) معادلة الدليل $2x - 6 = 0$ ورأسه نقطة الاصل.

(أ) ∵ البؤرة هي $(3,0)$ ∴ بالمقارنة مع $(P,0)$

$\Rightarrow p = 3$

∵ البؤرة تقع على محور السينات ∴ المعادلة القياسية للقطع المكافئ هي

$y^2 = 4px$

(بالتعويض عن $p = 3$)

$y^2 = 4(3)\ x$

$\therefore y^2 = 12x$

(ب) $\because 2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} \Rightarrow x = 3$

$\therefore\ x = 3$ (معادلة الدليل)

$\therefore\ p = 3$

$y^2 = -4px$

$\therefore\ y^2 = -4(3)x$

$y^2 = -12x$

بما ان الدليل سيني (موجب)

اذن المعادلة القياسية سينية (سالبة)



مثال

جد بؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $y^2 = 4x$ ثم ارسمه :

$y^2 = 4px$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$4p = 4 \Rightarrow p = \frac{4}{4} \Rightarrow p = 1$

$\therefore F(p,0) \Rightarrow F(1,0)$ ∴ البؤرة تقع على المحور السيني

$x = -p$ معادلة الدليل

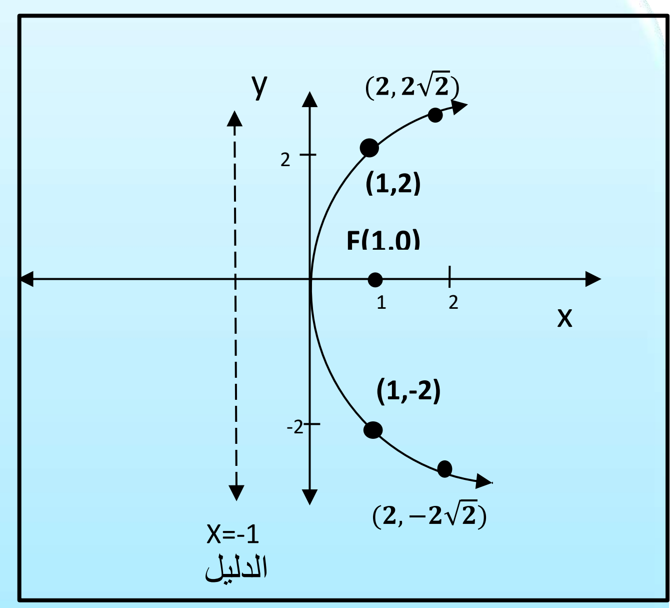
$\therefore x = -1$ (عكس إشارة البؤرة دائماً)

الرسم

$\because y^2 = 4x$ بالجذر التربيعي

$y = \mp 2\sqrt{x}$

X	Y
0	0
1	∓ 2
2	$\mp 2\sqrt{2}$



ملاحظة/ نأخذ القيم الموجبة لـ x لأن البؤرة تقع على المحور السيني الموجب

مثال

باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ إذا علم ان بؤرته $(\sqrt{3},0)$ والرأس في نقطة الأصل.

البؤرة $F(\sqrt{3},0)$ ، ولتكن النقطة $M(X,Y)$ من نقط منحني القطع المكافيء، والنقطة $Q(-\sqrt{3},y)$ هي نقطة تقاطع العمود المرسوم من M على الدليل $\overleftrightarrow{D}$ ومن تعريف القطع المكافيء $MF = MQ$

$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+\sqrt{3})^2 + (y-y)^2}$

بتربيع طرفين

$(x-\sqrt{3})^2 + y^2 = (x+\sqrt{3})^2$

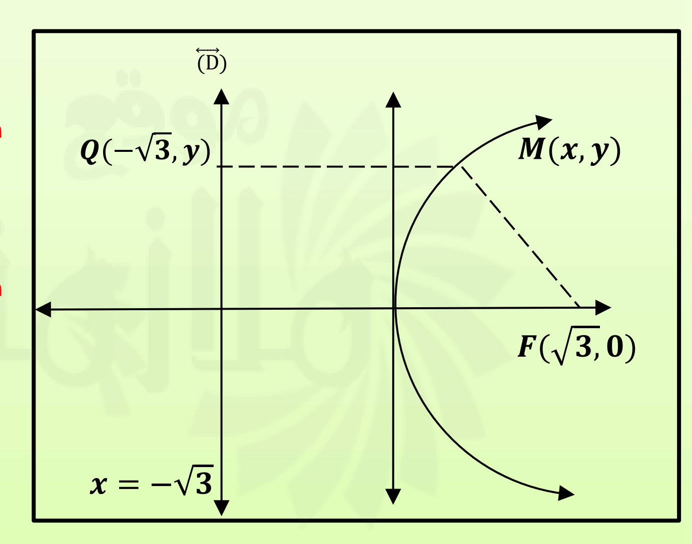
بفتح الأقواس

$\cancel{x^2} - 2\sqrt{3}x + \cancel{3} + y^2 = \cancel{x^2} + 2\sqrt{3}x + \cancel{3}$

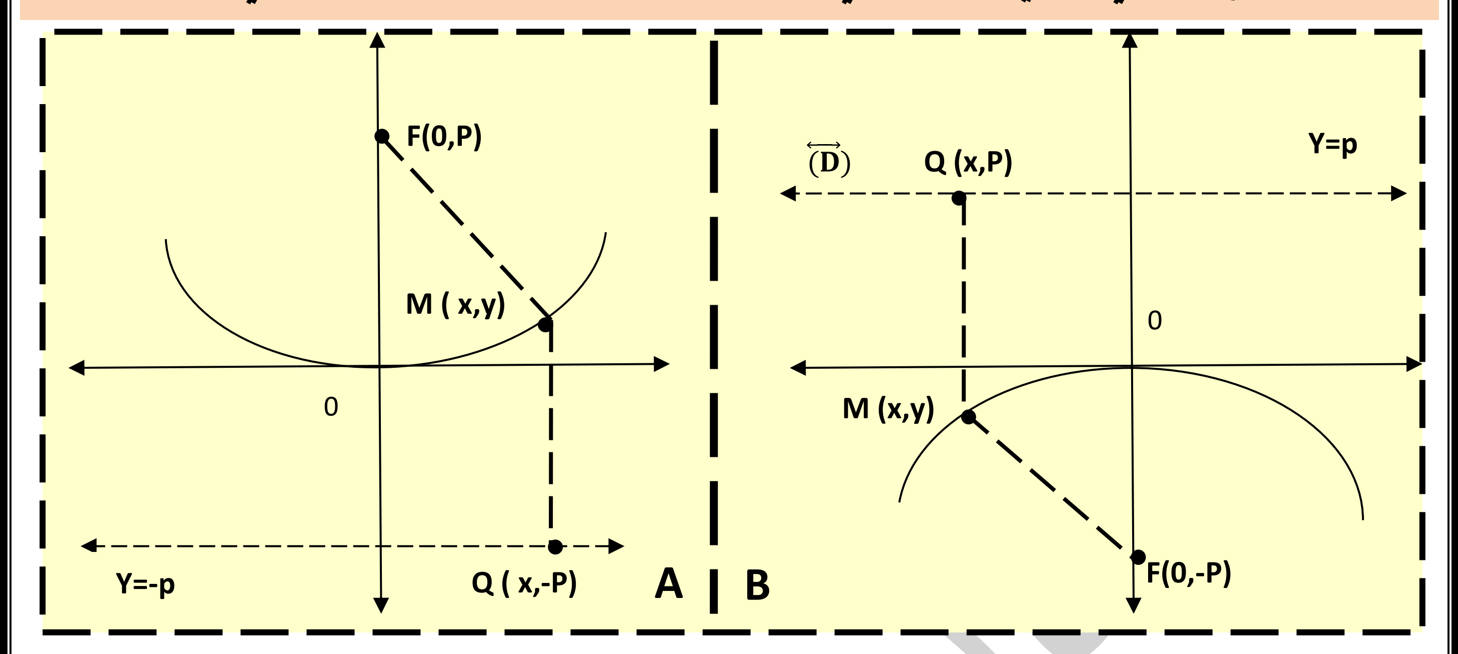
بالتبسيط

$y^2 = 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}x$

$y^2 = 4\sqrt{3}x$ (معادلة القطع المكافئ)



معادلة القطع المكافيء الذي بؤرته تنتمي لمحور الصادات $(y-axis)$ والرأس في نقطة الأصل



في المستوى الديكارتي المتعامد المحورين لتكن النقطة $F(0,P)$ هي بؤرة القطع المكافئ، والمستقيم D دليل القطع المكافئ والنقطة $Q(x,-P)$ هي نقطة تقاطع العمود المرسوم من M على الدليل، والنقطة $M(x,y)$ من نقط منحني القطع المكافئ والرأس في نقطة الأصل $(0,0)$كما في الشكل $A(7-2)$.

وبناء على تعريف القطع المكافئ فإن MF= MQ

(بتربيع طرفي المعادلة) $\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$

$\Rightarrow x^2+(y-p)^2 = (y+p)^2$

(بالتبسيط) $x^2+y^2-2py+p^2 = y^2+2py+p^2$

$x^2 = 2py+2py$

(المعادلة القياسية للقطع المكافئ) $x^2 = 4py \quad , \quad \forall p>0$

الجدول الآتي يمثل المعادلة القياسية للقطع المكافيء الذي رأسه في نقطة الأصل حيث P>0

فتحة القطع	المحور	الدليل	البؤرة	المعادلة
نحو الأعلى	y −axis	$Y=-p$	(0,P)	$x^2=4py$
نحو الأسفل	y −axis	$Y=p$	(0,-P)	$x^2=-4py$
نحو اليمين	x −axis	$x=-p$	(P,0)	$y^2=4px$
نحو اليسار	x −axis	$x=p$	(-P,0)	$y^2=-4px$

مثال جد بؤرة ومعادلة دليل القطع المكافيء $3x^2-24y=0$

الحل يجب تبسيط وترتيب المعادلة حتى نتمكن من مقارنتها مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ:

$$[3x^2-24y=0]\div 3$$

$$x^2-8y=0$$

$x^2 = 8y$

$x^2 = 4py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$4p = 8 \Rightarrow p = \frac{8}{4} \Rightarrow p = 2$

وبما ان البؤرة ∋ للمحور الصادي $\therefore F(o,p) \Rightarrow F(0,2)$ (البؤرة)

(عكس إشارة P) $y = -2$ (معادلة الدليل)

مثال جد معادلة القطع المكافئ إذا علم (أ) بؤرته (0,5) ورأسه نقطة الأصل.

∵ البؤرة ∋ لمحور الصادات ∴ المعادلة القياسية للقطع المكافيء هي $x^2 = 4py$

$\because p = 5$ (من البؤرة)

$\therefore x^2 = 4(5)y$

$x^2 = 20y$

(ب) معادلة الدليل $y = 7$ ورأسه نقطة الأصل

∵ معادلة الدليل y=7 ∴ المعادلة القياسية هي $x^2 = -4py$

$\therefore p=7$

$\therefore x^2 = -4(7)y$ (لأن الدليل موجب فالمعادلة تكون سالبة)

$x^2 = -28y$

مثال جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2,4)$ و $(2,-4)$

∵ أشارة قيمة y هي المتغيرة في النقطتين

∴ النقطتان متناظرتان حول المحور السيني الموجب.

∴ المعادلة القياسية هي $y^2 = 4px$

(نعوض إحدى النقطتين في المعادلة القياسية)

∵ (2,4) ∋ للقطع ∴ تحقق معادلته

$(4)^2 = 4p(2)$

$16 = 8p \Rightarrow p = \frac{16}{8} \Rightarrow p = 2$ (نعوض في المعادلة)

$\therefore y^2 = 4(2)x$

$\therefore y^2 = 8x$ (معادلة القطع المكافىء)

مثال جد معادلة القطع المكافيء الذي رأسه نقطة الأصل ويمر دليل القطع المكافيء بالنقطة $(3,-5)$

ملاحظة : عندما يقال في السؤال ان الدليل يمر بالنقطة فهذا يعني ان الدليل أما يساوي الاحداثي السيني للنقطة إذا كانت البؤرة ∋ لمحور السينات أو ان الدليل يساوي الأحداثي الصادي للنقطة إذا كانت البؤرة ∋ لمحور الصادات.

ولا يجوز تعويض النقطة بمعادلة القطع وذلك لأن القطع لا يمر بالنقطة وإنما الدليل هو الذي يمر

إذن يوجد احتمالين للمعادلة القياسية وذلك لعدم تحديد موقع البؤرة

الاحتمال الأول : البؤرة تنتمي لمحور السينات السالب وذلك لان معادلة الدليل $x = 3$

$\therefore y^2 = -4px$

$\therefore P = 3$ من الدليل

$F(-3, 0)$

$\therefore y^2 = -4(3)x$

$y^2 = -12x$ (معادلة القطع المكافئ)

الاحتمال الثاني : البؤرة تنتمي لمحور الصادات الموجب وذلك لان معادلة الدليل $y = -5$

$\because x^2 = 4py$

$\therefore P = 5$ من الدليل

$F(0, 5)$

$\therefore x^2 = 4(5)y$

$x^2 = 20y$ (معادلة القطع المكافئ)

تمارين $[1 - 2]$

١- جد معادلة المقطع المكافيء في كل مما يأتي ثم ارسم المنحني البياني لها:

أ) البؤرة (5,0) والرأس نقطة الأصل.

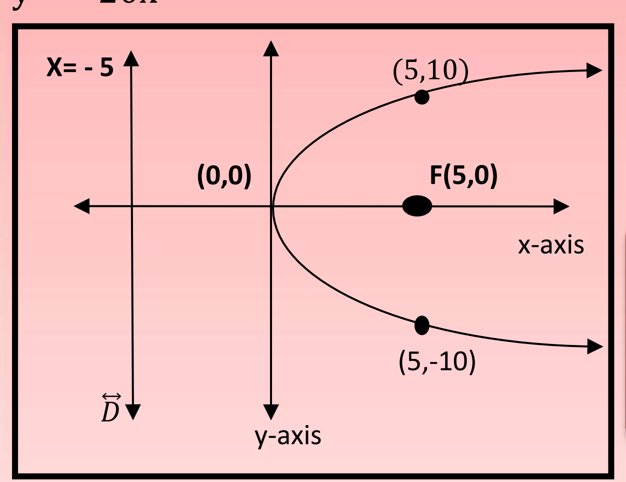
$\because$ البؤرة ∋ لمحور السينات $\therefore$ المعادلة القياسية هي $y^2 = 4px$

$\because p = 5$ (من البؤرة المعطاة في السؤال)

$\therefore y^2 = 4(5)x$

$y^2 = 20x$

X	y	(x, y)
0	0	$(0, 0)$
5	∓ 10	$(5, 10)$
		$(5, -10)$



ملاحظة: إذا كانت البؤرة ∋ لمحور السينات نأخذ قيم x هي 0 وقيمة P المعطاة لنا أو التي نجدها و نعوضها في المعادلة التي استخرجناها حتى نحصل على قيم y

ب) البؤرة $(0,-4)$ والرأس نقطة الأصل

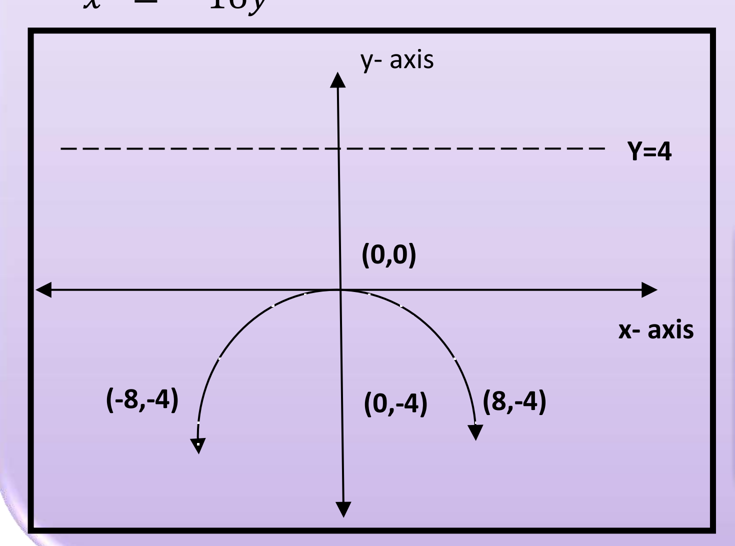
البؤرة ∋ لمحور الصادات ∴ المعادلة القياسية هي $x^2 = -4py$

$\because p = 4$

$\therefore x^2 = -4\,(4)y$

$x^2 = -16y$

X	Y	(x,y)
0	0	(0,0)
∓ 8	-4	(8,-4)
		(-8,-4)



ملاحظة: إذا كانت البؤرة ∋ لمحور الصادات فنأخذ قيم y وهي 0 وقيمة p من البؤرة ونعوض في المعادلة التي استخرجناها حتى نحصل على قيم x

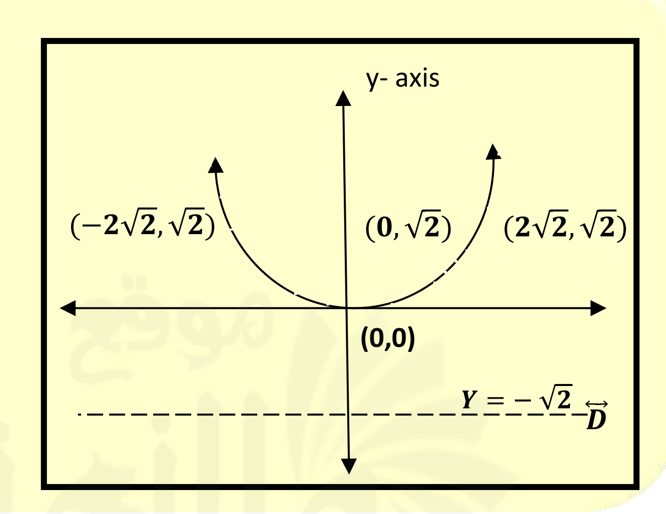
ج) البؤرة $(0,\sqrt{2})$ والرأس نقطة الأصل

∵ البؤرة ∋ لمحور الصادات ∴ المعادلة القياسية هي $x^2 = 4py$

$\because p = \sqrt{2}$

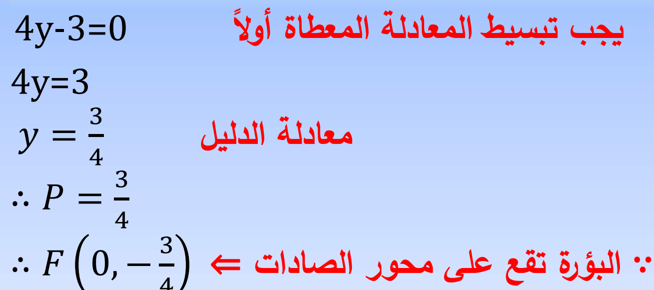
$\therefore x^2 = 4\,(\sqrt{2})y$

$x^2 = 4\sqrt{2}y$



X	Y	(x,y)
0	0	$(0,0)$
$\mp 2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$(2\sqrt{2},\sqrt{2})$
		$(-2\sqrt{2},2)$

د) معادلة دليل القطع المكافئ $4y - 3 = 0$ والرأس نقطة الأصل



4y-3=0 يجب تبسيط المعادلة المعطاة أولاً

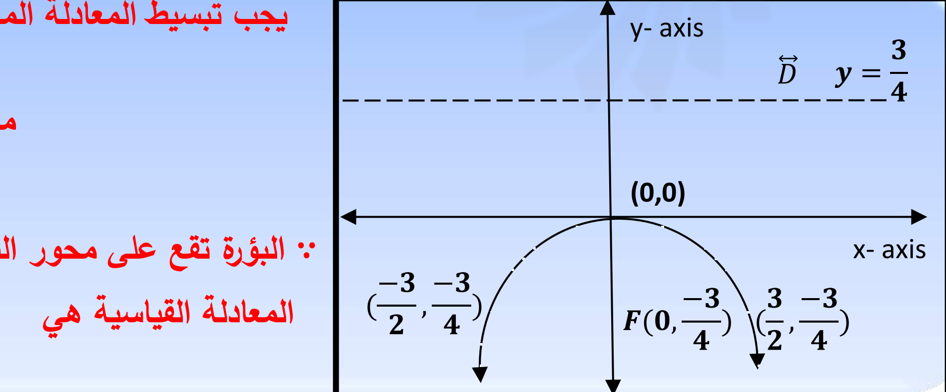
4y=3

$y = \frac{3}{4}$ معادلة الدليل

$\therefore P = \frac{3}{4}$

$\therefore F\left(0,-\frac{3}{4}\right)$ ⇐ ∵ البؤرة تقع على محور الصادات

$x^2 = -4py$ المعادلة القياسية هي





$\therefore x^2 = -4\left(\frac{3}{4}\right) y$

$x^2 = -3y$ معادلة المقطع المكافىء

قيم x , y من البؤرة $\left(0, \frac{-3}{4}\right)$

X	Y	(x,y)
0	0	(0,0)
$\mp\frac{3}{2}$	$\frac{-3}{4}$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{4}\right)$
		$\left(\frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}\right)$

٢ – في كل مما يأتي جد البؤرة والرأس ومعادلتي المحور والدليل للمقطع المكافئ

a) $x^2 = 4y$

$x^2 = 4py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\therefore 4p = 4 \Rightarrow p = \frac{4}{4} \Rightarrow p = 1 \Rightarrow F(0,1)$ البؤرة

$y = -1$ معادلة الدليل

$v(0,0)$ الرأس , $x = 0$ معادلة المحور

b) $2x + 16y^2 = 0$

يجب ترتيب وتبسيط المعادلة بحيث المتغير ذو الدرجة الثانية يكون بالطرف الأيسر ويجب ان يكون معامله =1

$\therefore$ ننقل 2x إلى الطرف الأيمن ومن ثم نقسم على معامل y^2

$[16y^2 = -2x] \div 16$

$y^2 = \frac{-2}{16} x \Rightarrow y^2 = \frac{-1}{8} x$

$\therefore$ حصلنا على معادلة قطع مكافئ بؤرته نقع على محور السينات

$y^2 = -4px$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$-4p = -\frac{1}{8} \Rightarrow p = \frac{1}{32}$

$\therefore F = (-p, 0) \Rightarrow F = \left(\frac{-1}{32}, 0\right)$

معادلة المحور $y = 0$ ، الرأس $V(0,0)$ الدليل $x = \frac{1}{32}$

٣ – جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (2,-5-) ، (2,-5) والرأس في نقطة الأصل.

$\because$ الاحداثي الصادي ثابت (سالب) $\therefore$ القطع المكافئ متناظر حول محور الصادات السالب $\therefore$ البؤرة تقع على محور الصادات السالب.

$\therefore x^2 = -4py$ المعادلة القياسية

$\because (2,-5) \in$ للقطع $\therefore$ تحقق المعادلة

$(2)^2 = -4p(-5) \Rightarrow 4 = 20p \Rightarrow p = \frac{4}{20}$

$\therefore p = \frac{1}{5}$

$\therefore x^2 = -4\left(\frac{1}{5}\right) y \Rightarrow x^2 = \frac{-4}{5} y$



٤ – إذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة (-3,4) والرأس في نقطة الأصل، جد معادلته علماً ان بؤرته تنتمي لأحد المحورين.

ملاحظة: (إذا كانت النقطة ∋ للدليل هذا لا يعني ان النقطة ∋ للقطع)

∵ السؤال لم يحدد انتماء البؤرة ∴ نأخذ الحالتين.

الحالة الأولى: البؤرة ∋ لمحور السينات

$\therefore x = -3$ معادلة الدليل

$\therefore P = 3$ مجردة من الاشارات

$F(3,0)$ البؤرة والمعادلة عكس اشارة الدليل

$y^2 = 4px$

$y^2 = 4(3)x$

$y^2 = 12x$

الحالة الثانية: البؤرة ∋ لمحور الصادات

$\therefore y = 4$ معادلة الدليل

$\therefore P = 4$ مجردة من الاشارات

$F(0,-4)$ البؤرة والمعادلة عكس اشارة الدليل

$x^2 = -4py$

$x^2 = -4(4)y$

$x^2 = -16y$

٥– أوجد قيمة A وبؤرة و دليل القطع المكافئ الذي معادلته $Ax^2 + 8y = 0$ المار بالنقطة (1,2) ثم ارسم القطع

$Ax^2 + 8y = 0$....................(1)

∵ (1,2) ∋ للقطع ∴ تحقق المعادلة .... (1)

$A(1)^2 + 8(2) = 0$

$A + 16 = 0 \Rightarrow A = -16$ نعوضها في (١)

$-16x^2 + 8y = 0$

$[-16x^2 = -8y] \div -16$ (نحول 8y إلى الطرف الأيمن ونقسم على معامل x^2)

$x^2 = \frac{-8}{-16}y \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y$

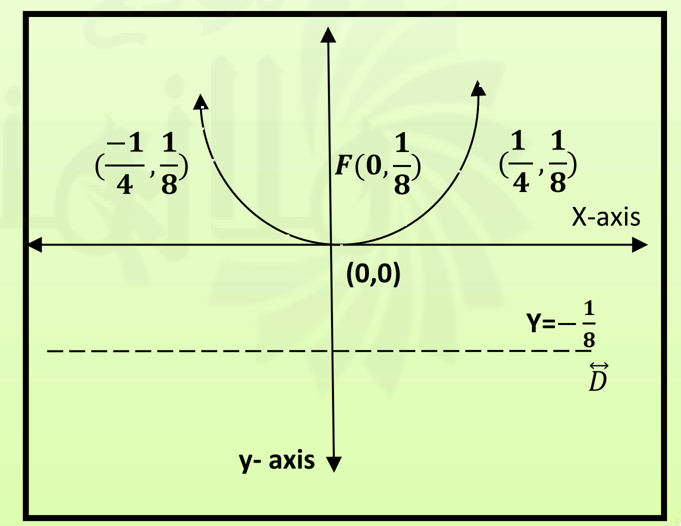
$x^2 = 4py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\therefore 4p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{8}$

$F(0,\frac{1}{8})$ البؤرة

$y = -\frac{1}{8}$ معادلة الدليل

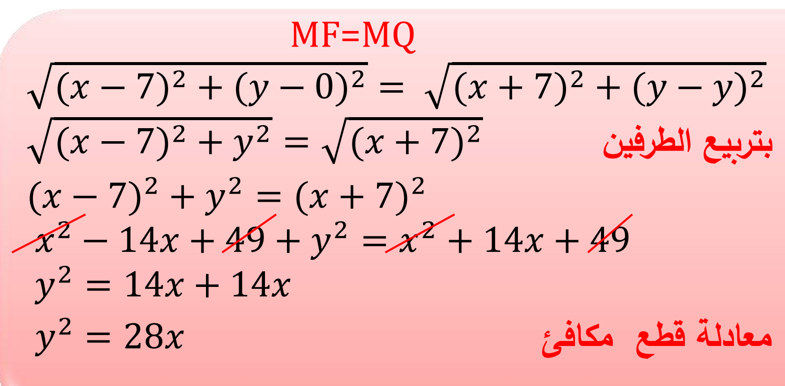
X	Y	(x,y)
0	0	$(0,0)$
$\mp\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$(\frac{-1}{4},\frac{1}{8})$ $(\frac{1}{4},\frac{1}{8})$





6 – باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ :

أ) البؤرة (7,0) والرأس نقطة الأصل:



MF=MQ

$$\sqrt{(x-7)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+7)^2+(y-y)^2}$$

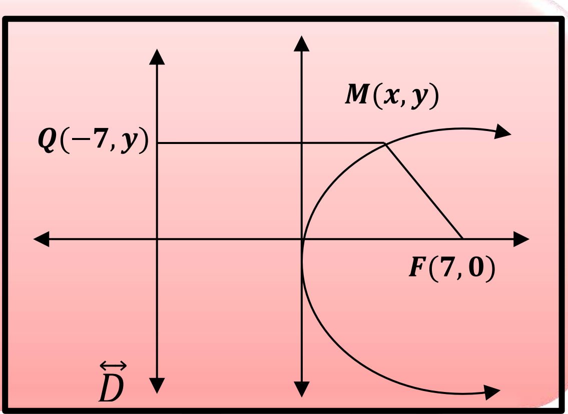
$$\sqrt{(x-7)^2+y^2} = \sqrt{(x+7)^2}$$ بتربيع الطرفين

$$(x-7)^2+y^2 = (x+7)^2$$

$$x^2-14x+49+y^2 = x^2+14x+49$$

$$y^2 = 14x+14x$$

$$y^2 = 28x$$ معادلة قطع مكافئ



ب) معادلة الدليل $y=\sqrt{3}$ والرأس نقطة الأصل.

∵ الدليل $y=\sqrt{3}$

∴ $p=\sqrt{3}$ والبؤرة ∈ لمحور الصادات السالب (عكس اشارة الدليل)

$$\therefore F(0,-\sqrt{3})$$

$$MF = MQ$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y+\sqrt{3})^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-\sqrt{3})^2}$$

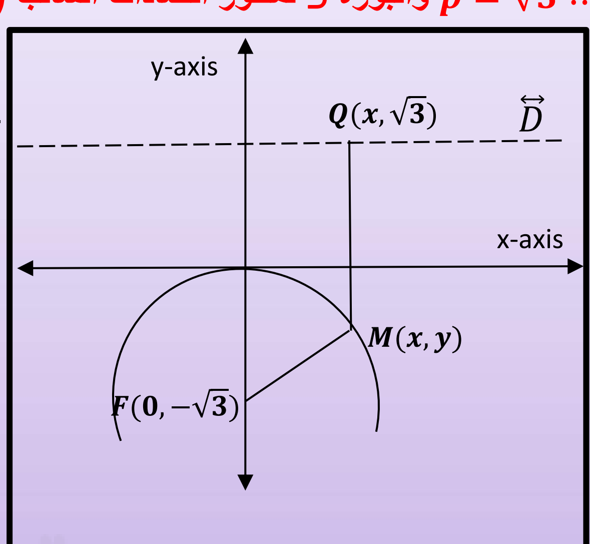
$$\sqrt{x^2+(y+\sqrt{3})^2} = \sqrt{(y-\sqrt{3})^2}$$ بتربيع الطرفين

$$x^2+(y+\sqrt{3})^2 = (y-\sqrt{3})^2$$ بفتح الأقواس

$$x^2+y^2+2\sqrt{3}y+3 = y^2-2\sqrt{3}y+3$$

$$\therefore x^2 = -2\sqrt{3}y-2\sqrt{3}y$$

$$x^2 = -4\sqrt{3}y$$



أسئلة إثرائية

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه في نقطة الأصل، ويمر بالنقطتين (3,6) ، (-3,6) ثم جد معادلة دليله.

∵ الاحداثي الصادي ثابت(موجب) ∴ القطع متناظر حول المحور الصادي الموجب.

∴ البؤرة ∈ لمحور الصادات ⇐ المعادلة القياسية $x^2=4py$

∵ (3,6) ∈ للقطع ∴ تحقق المعادلة القياسية

$(3)^2=4p(6)$

$$9=24p \Rightarrow p=\frac{9}{24} \Rightarrow p=\frac{3}{8}$$

$$\therefore x^2 = 4\left(\frac{3}{8}\right)y$$

$$\therefore x^2 = \frac{3}{2}y$$ معادلة القطع المكافئ

$$\Rightarrow y = \frac{-3}{8}$$ معادلة الدليل



س/ إذا كانت النقطة $(\frac{1}{2},-1)$ ∋ للقطع المكافئ الذي معادلته $(2Q+3)x+2Qy^2=0$ جد قيمة $Q\in R$ ، ومن ثم جد البؤرة ومعادلة الدليل للقطع.

∵ $(\frac{1}{2},-1)$ ∋ للقطع ∴ تحقق معادلته ∴ نعوض بدل x بـ $(\frac{1}{2})$ وبدل y بـ (-1) في المعادلة المعطاة

$(2Q+3)\left(\frac{1}{2}\right)+2Q(-1)^2=0$ نبسط ونرتب المعادلة

$Q+\frac{3}{2}+2Q=0$

$3Q+\frac{3}{2}=0\Rightarrow 3Q=\frac{-3}{2}\Rightarrow Q=\frac{-3}{6}\Rightarrow Q=\frac{-1}{2}$

نعوض بدل Q بـ$(-\frac{1}{2})$ في المعادلة المعطاة في السؤال ويبقى y, x مجاهيل

$\left(2(\frac{-1}{2})+3\right)x+2\left(\frac{-1}{2}\right)y^2=0$

$(-1+3)x-y^2=0\Rightarrow 2x-y^2=0$

$\Rightarrow 2x=y^2$

$\therefore y^2=2x$ معادلة قطع المكافئ

$y^2=4px$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\therefore 4p=2\Rightarrow p=\frac{2}{4}\Rightarrow p=\frac{1}{2}$

$\therefore F\left(\frac{1}{2},0\right)$ (البؤرة نفس اشارة المعادلة)

$\therefore x=\frac{-1}{2}$ (معادلة الدليل عكس اشارة البؤرة والمعادلة)

س/ إذا كانت $cy^2=(3C-4)x$ معادلة قطع مكافئ جد قيمة $C\in R$ إذا علمت أن دليله يمر بالنقطة $\left(\frac{-1}{4},3\right)$

$[cy^2=(3c-4)x]\div c$ نقسم على معامل y^2

$y^2=(\frac{3c-4}{c})x$ معادلة قطع مكافئ بؤرتها ∋ لمحور السينات

$y^2=4px$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\therefore 4p=\frac{3c-4}{c}\Rightarrow p=\frac{3c-4}{4c}\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$

$\because x=-\frac{1}{4}$ معادلة الدليل

$\therefore p=\frac{1}{4}$ ....نعوض في(1)

$\frac{1}{4}=\frac{3c-4}{4c}$

$4c=4(3c-4)$

$4c=12c-16$

$12c-4c=16$

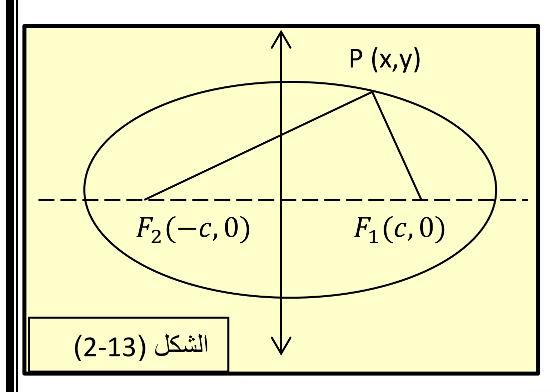
$8c=16\Rightarrow c=\frac{16}{8}\Rightarrow c=2$

بما ان الدليل يمر بالنقطة $(-\frac{1}{4},3)$
اذن معادلة الدليل = الاحداثي السيني للنقطة المعطاة
لأن البؤرة ∋ لمحور السينات

القطـع الـنـاقـص ELLIPSE

تعريف: القطع الناقص مجموعة من النقط في المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) عدد ثابت

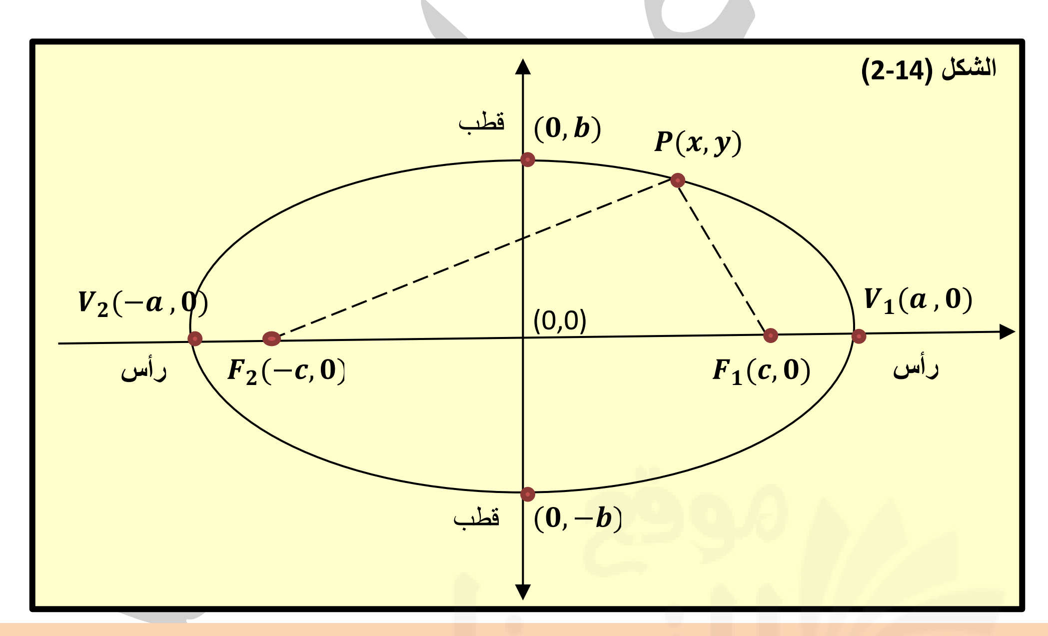
قطع ناقص بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل



الشكل (2-13)

بؤرتا القطع الناقص هما $F_2(-c,0),F_1(c,0)$ والعدد الثابت هو $2a$ ، $a>0,\ C>0$ تسمى النقطة التي تقع في منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين بمركز القطع الناقص (Center) ويسمى المستقيم المار بالبؤرتين بالمحور البؤري (Focal axis) ويقطع القطع الناقص في نقطتين تسميان رأسا القطع وتسمى قطعة المستقيم الواصلة بين الرأسين بالمحور الكبير (Major axis) وطولها $(2a)$ أيضاً ويساوي مجموع بعدي أي نقطة $P(x,y)$ من نقاط القطع الناقص عن البؤرتين أي ان : $PF_1+PF_2=2a$

وتسمى القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتي تقاطع المستقيم العمود على المحور الكبير من مركز القطع الناقص. مع القطع الناقص بالمحور الصغير (Minor axis) وطولها $(2b)$ حيث $b>0$ ونهاياته تسميان القطبين



معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل

لاحظ الشكل (2-14)

$$PF_1+PF_2=2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$ (بتربيع طرفي المعادلة)

$$\Rightarrow (x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$\Rightarrow x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx$$ (بقسمة طرفي المعادلة على4)

$$\Rightarrow a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$ (بتربيع طرفي المعادلة)

$$a^2[x^2+2cx+c^2+y^2]=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$



بالتبسيط

$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$

$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$

$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ ……………(1)

بما أن $a > c$ دائماً فإن $a^2 - c^2 > 0$ وبفرض ان $b^2 = a^2 - c^2$ حيث $b > 0$

$b^2 = a^2 - c^2$ ……………(2) نعوض 2 في 1

$\Rightarrow x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ بقسمة طرفي المعادلة على $a^2\ b^2$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

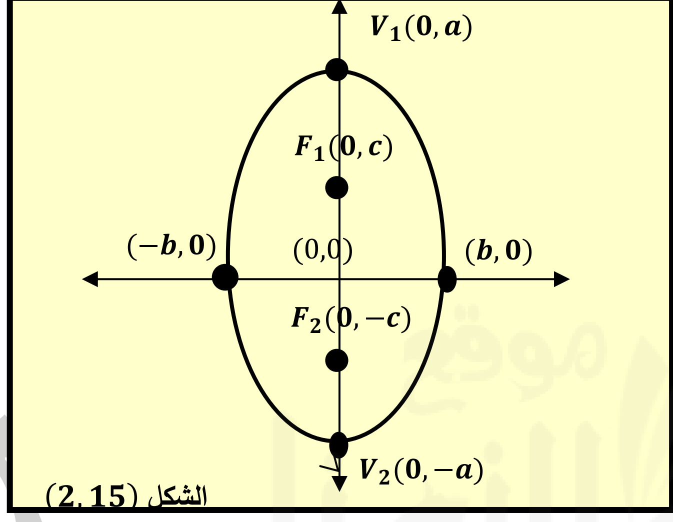
تمثل المعادلة القياسية للقطع الناقص بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل.

وتسمى النسبة $\frac{c}{a}$ بالاختلاف المركزي. أي ان $e = \frac{c}{a}$ ويكون دائماً أقل من الواحد.

معادلة قطع ناقص بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الأصل

لاحظ الشكل (2-15) بنفس خطوات الاشتقاق السابق لمعادلة القطع الناقص بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل وباستخدام التعريف نحصل على المعادلة $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

حيث البؤرتان على محور الصادات والمركز في نقطة الأصل



الشكل (2.15)

قطع ناقص بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الأصل		قطع ناقص بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	المعادلة	1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
$F_1(0,c), F_2(0,-c)$	البؤرتان	2) $F_1(c,o), F_2(-c,o)$
$V_1(0,a), V_2(0,-a)$	الرأسان	3) $V_1(a,o), V_2(-a,0)$

4) $c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2$

5) $a > c, a > b$

6) $2a =$ طول المحور الكبير، المسافة بين الراسين ، العدد الثابت

7) $2b=$ طول المحور الصغير، المسافة بين القطبين

8) $2c =$ البعد البؤري ، المسافة بين البؤرتين

9) $A = ab\pi$ مساحة منطقة القطع الناقص ويرمز لها A (Area)

10) $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $\pi = \frac{22}{7}$ محيط القطع الناقص ويرمز له P (Perimeter)

11) $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, $(e < 1)$ "e" الاختلاف المركزي ويكون دائماً أقل من الواحد

مثال في كل مما يأتي جد طول كل من المحورين وإحداثي كل من البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي

1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\therefore a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$V_1(5,0), V_2(-5,0)$

البؤرتين والرأسين ∋ لمحور السينات وذلك لأن القيمة الكبيرة تحت x ولان $a > b$ دائما في القطع الناقص

$2a = 2(5) = 10$ طول المحور الكبير

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow M_1\ (0,4), M_2(0,-4)$

(إذا كان الرأسان على محور السينات فالقطبان على محور الصادات والعكس صحيح.)

$2b = 2(4) = 8$ (طول المحور الصغير)

$\because\ c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 16 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$

$\therefore\ F_1(3,0), F_2(-3,0)$ البؤرتان

$2c = 2(3) = 6$ البعد البؤري

$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} < 1$ الاختلاف المركزي

2) $4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}$

$(4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}) * \frac{3}{4}$

ملاحظة: يجب ان يكون الطرف الأيمن=1 ∴ نضرب المعادلة * $\frac{3}{4}$

$3x^2 + \frac{9}{4}y^2 = 1$

$\frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = 1$

عند وضع 3 في المقام يقلب فيصبح $\frac{1}{3}$ ، $\frac{9}{4}$ تقلب فتصبح $\frac{4}{9}$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

وذلك لأن $\frac{4}{9} > \frac{1}{3}$ ∴ البؤرتان والرأسان ∋ لمحور الصادات

$a^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{2}{3} \Rightarrow v_1\left(0,\frac{2}{3}\right), v_2\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ الرأسان

$2a = 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$ طول المحور الكبير

$b^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow M_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right), M_2(\frac{-1}{\sqrt{3}},0)$ القطبان

$2b = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ طول المحور الصغير

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} \Rightarrow c^2 = \frac{4-3}{9} \Rightarrow c^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$

$\therefore F_1\left(0, \frac{1}{3}\right), F_2\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ البؤرتان

$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} * \frac{3}{2} = \frac{1}{2} < 1$ الاختلاف المركزي

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(3,0), F_2(-3,0)$ ورأساه النقطتان $V_2(5,0) V_2(-5,0)$ ومركزه نقطة الأصل

البؤرتان ∋ لمحور السينات ∴ شكل المعادلة القياسية هي $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ldots\ldots\ldots (1)$

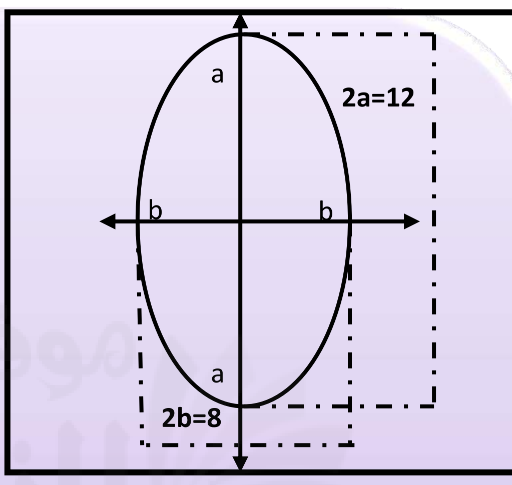
$\because c = 3$ (من البؤرة) $\Rightarrow c^2 = 9$

$a = 5$ (من الرؤوس) $\Rightarrow a^2 = 25$

نعوض في (١) $\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 9 = 25 - b^2 = b^2 = 25 - 9 \Longrightarrow b^2 = 16$

$\therefore \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوراه على المحورين الأحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات ومن محور الصادات جزءاً طوله (12) وحدة، ثم جد المسافة بين البؤرتين ومساحة منطقته ومحيطه.



∵ القطع يقطع من محور الصادات مسافة 12 ومن محور السينات مسافة 8.

∴ المسافة من محور الصادات هي طول المحور الكبير

والمسافة المقطوعة من السينات هي طول المحور الصغير.

وذلك لأن المحور الكبير دائماً أكبر من المحور الصغير في القطع الناقص.

$\therefore 2a = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{2} \Longrightarrow a = 6 \Longrightarrow a^2 = 36$

$2b = 8 \Rightarrow b = \frac{8}{2} \Rightarrow b = 4 \Rightarrow b^2 = 16$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$\therefore \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow c^2 = 36 - 16 \Longrightarrow c^2 = 20 \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$

$2c = 2(2\sqrt{5}) \Longrightarrow 2c = 4\sqrt{5}$ (المسافة بين البؤرتين) البعد البؤري

$\therefore \quad A = ab\pi$ (مساحة القطع الناقص)

$\therefore A = (6)(4)\pi \Longrightarrow A = 24\pi$ وحدة مربعة ($\pi = \frac{22}{7}$ حيث)

$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (محيط القطع الناقص)

$P = 2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}} \Longrightarrow P = 2\pi\sqrt{\frac{52}{2}} \Longrightarrow p = 2\pi\sqrt{26}$ وحدة

مثال لتكن $kx^2 + 4y^2 = 36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وأحدى بؤرتيه $(\sqrt{3},0)$ جد قيمة k.

نقسم طرفي المعادلة على العدد الثابت في الطرف الأيمن $[kx^2 + 4y^2 = 36] \div 36$

$$\frac{kx^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{\frac{36}{4}} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$\because$ البؤرة $(\sqrt{3},0) \in$ لمحور السينات $\therefore$ شكل المعادلة القياسي $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\therefore a^2 = \frac{36}{k}, \quad b^2 = 9, \quad c = \sqrt{3} \Rightarrow c^2 = 3$$

$$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 3 = \frac{36}{k} - 9$$

$$3 + 9 = \frac{36}{k}$$

$$12 = \frac{36}{k}$$

$$12k = 36 \Rightarrow k = \frac{36}{12} \Rightarrow k = 3$$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين البؤرتين (6) وحدات والفرق بين طولي المحورين يساوي (2) وحدة.

$\because$ المسافة بين البؤرتين = 6 $\quad \therefore 2c = 6 \Rightarrow c = \frac{6}{2} \Rightarrow c = 3$

$\because$ الفرق بين طولي المحورين = 2 $\Leftarrow$ (طول المحور الكبير – طول المحور الصغير =2)

$$\therefore [2a - 2b = 2] \div 2$$

$$a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + b \text{ ....(1)}$$

$$\because c^2 = a^2 - b^2 \text{..................(2)}$$

نعوض (1) في (2)

$$\therefore (3)^2 = (1+b)^2 - b^2$$

$$9 = 1 + 2b + b^2 - b^2$$

$$9 - 1 = 2b \Rightarrow 2b = 8 \Longrightarrow b = 4 \Longrightarrow b^2 = 16$$

(نعوض b=4 في (1) حتى نحصل على قيمة a)

$$a = 1 + 4 \Longrightarrow a = 5 \Longrightarrow a^2 = 25$$

اذا كان الفرق بين طولي المحورين قيمه عددية موجبة فذلك يعني طول المحور الكبير – طول المحور الصغير

لان المحور الكبير في القطع الناقص دائما هو الاكبر

$\because$ البؤرتان $\in$ لمحور السينات $\therefore$ شكل المعادلة القياسي $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

معادلة القطع الناقص $\therefore \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

مثال جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات.

$\because$ يجب استخراج البؤرة من القطع المكافئ اولاً :

$$y^2 - 12x = 0$$

$$y^2 = 12x$$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $y^2 = 4px$

$$\therefore 4p = 12 \Longrightarrow p = 3$$

بؤرة القطع المكافئ $\therefore F(3,0)$

∴ بؤرتي القطع الناقص هما $F_2(-3,0)$, $F_1(3,0)$ $\therefore\ c = 3 \Longrightarrow c^2 = 9$

∵ طول المحور الصغير =10 $\therefore\ 2b = 10 \Longrightarrow b = 5 \Longrightarrow b^2 = 25$

$c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow 9 = a^2 - 25 \Longrightarrow a^2 = 9 + 25 \Longrightarrow a^2 = 34$

∵ البؤرتين ∋ لمحور السينات ∴ شكل المعادلة القياسي $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$

مثال باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_2(-2,0)$, $F_1(2,0)$ والعدد الثابت= 6.

ملاحظة : العدد الثابت = طول المحور الكبير)

$\forall p(x,y) \in$ للقطع الناقص

$\therefore PF_1 + PF_2 = 2a$

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2} = 6$

$[\sqrt{(x-2)^2 + y^2}]^2 = [6 - \sqrt{(x+2)^2 + y^2}]^2$ بتربيع الطرفين

$(x-2)^2 + y^2 = 36 - 12\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + (x+2)^2 + y^2$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 36 - 12\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + x^2 + 4x + 4 + y^2$

$12\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 36 + 4x + 4x$

$[12\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 36 + 8x] \div 4$

$[3\sqrt{(x+2)^2 + y^2)}]^2 = [9 + 2x]^2$ بتربيع الطرفين

$9[(x+2)^2 + y^2] = 81 + 36x + 4x^2$

$9[x^2 + 4x + 4 + y^2] = 81 + 36x + 4x^2$

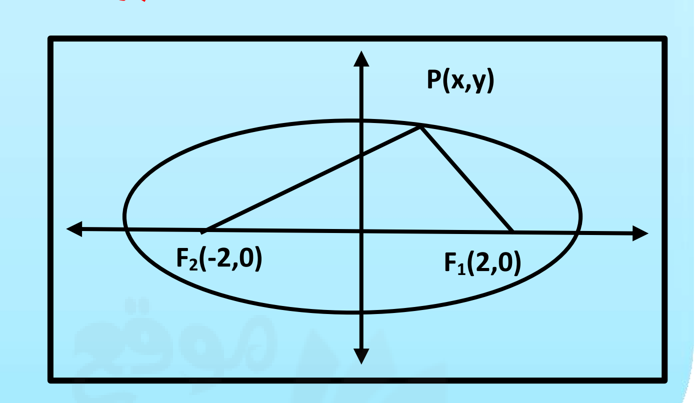
$9x^2 + 36x + 36 + 9y^2 = 81 + 36x + 4x^2$

$9x^2 - 4x^2 + 9y^2 = 81 - 36$

$[5x^2 + 9y^2 = 45] \div 45$

$\frac{x^2}{\frac{45}{5}} + \frac{y^2}{\frac{45}{9}} = \frac{45}{45}$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ معادلة القطع الناقص



طريقة رسم القطع الناقص

لتكن $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ معادلة قطع ناقص بؤرتاه ∋ لمحور السينات ولرسم هذا القطع نتبع الآتي

١ – نعين النقطتين $V_1(a,o), V_2(-a,0)$

٢ – نعين النقطتين $M_1(0,b), M_2(0,-b)$

٣ – نصل بين النقاط الأربعة $V_1M_1V_2M_2$ على الترتيب بمنحني متصل.

٤ – نعين البؤرتين $F_1(c,0), F_2(-c,0)$

  07901311457

تمارين [2 − 2]

١ − عيّن كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة المبينة معادلتها في كل مما يأتي:

a) $x^2 + 2y^2 = 1$

$\frac{x^2}{1} + \frac{2y^2}{1} = 1$

$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$

$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow V_1(1,0), V_2(-1,0) \Longrightarrow 2a = 2(1) = 2$ طول المحور الكبير

$b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow M_1\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right), M_2\left(0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \Longrightarrow 2b = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$ طول المحور الصغير

$c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow c^2 = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow c^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow F_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right), F_2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)$

$y = 0$ معادلة المحور الكبير

$x = 0$ معادلة المحور الصغير

$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ الاختلاف المركزي

b) $9x^2 + 13y^2 = 117$

$9x^2 + 13y^2 = 117] \div 117$

$\frac{x^2}{\frac{117}{9}} + \frac{y^2}{\frac{117}{13}} = 1 \quad \Longrightarrow \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$a^2 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13} \Rightarrow 2a = 2(\sqrt{13}) = 2\sqrt{13}$ طول المحور الكبير

$V_1(\sqrt{13},0), V_2(-\sqrt{13},0)$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow 2b = 2(3) = 6$ طول المحور الصغير

$M_1(0,3), M_2(0,-3)$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 13 - 9 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = 2$

$F_1(2,0), F_2(-2,0)$

$x = 0$ معادلة المحور الصغير

$y = 0$ معادلة المحور الكبير



٢- جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه في نقطة الأصل في كل مما يأتي ثم أرسمه"

أ) البؤرتان هما النقطتان $(5,0)$، $(-5,0)$ وطول محوره الكبير يساوي 12 وحدة

∵ البؤرتان ∋ لمحور السينات

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ∴ شكل المعادلة القياسية

$c=5 \Rightarrow c^2=25$ [من البؤر]

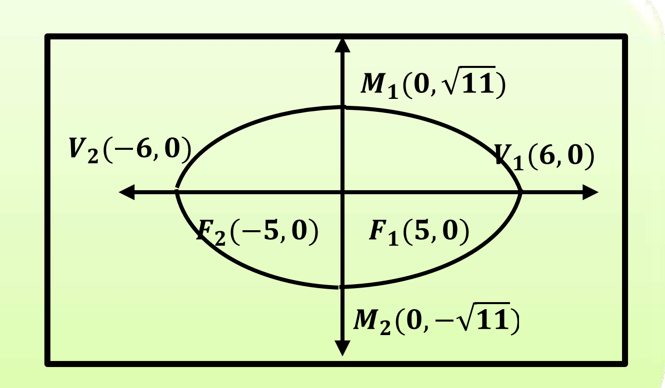
∵ طول المحور الكبير = 12

$\therefore 2a=12 \Rightarrow a=6 \Rightarrow a^2=36$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 25=36-b^2$

$\Longrightarrow b^2=36-25 \Longrightarrow b^2=11$

$\therefore \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$



ب) البؤرتان هما $(0,\mp 2)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x=\mp 4$

∵ البؤرتان ∋ لمحور الصادات

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ∴ شكل المعادلة القياسي

$c=2 \Rightarrow c^2=4$ (من البؤرتان)

∵القطع يتقاطع مع محور السينات عند $x=\mp 4 \Leftarrow y=0$

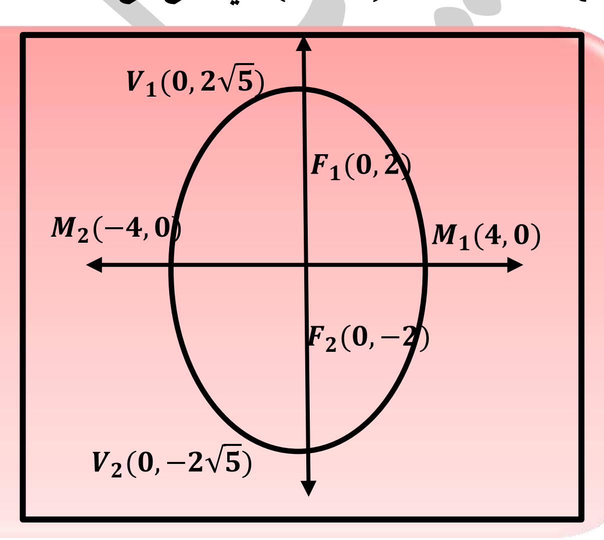
$\therefore (4,0),(-4,0)$ يمثل القطبان

$\therefore b=4 \Rightarrow b^2=16$

$c^2=a^2-b^2$

$4=a^2-16 \Rightarrow a^2=4+16 \Rightarrow a^2=20$

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{20}=1$



ج) إحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين $1,5$ وحدة على الترتيب.

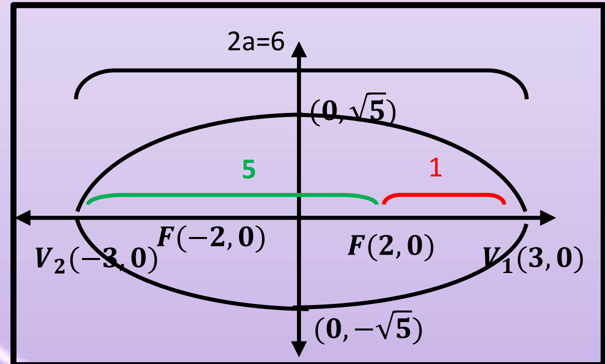
∵ إحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي المحور الكبير بالعددين 5 , 1

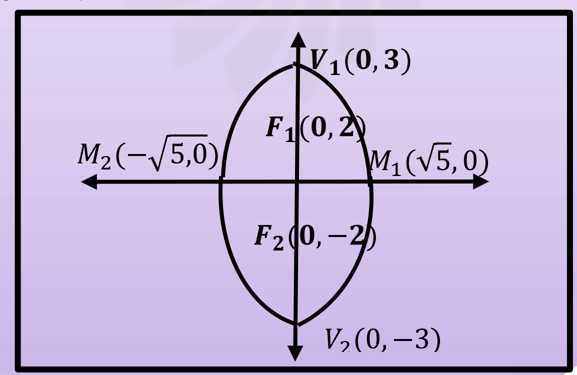
$\therefore 1+5=6$ طول المحور الكبير $\therefore 2a=6 \Rightarrow a=3 \Rightarrow a^2=9$

$\because a=3 \Rightarrow c=3-1 \Rightarrow c=2$

$\therefore c^2=a^2-b^2 \Longrightarrow 4=9-b^2 \Rightarrow b^2=9-4 \Longrightarrow b^2=5$

في حالة البؤرة ∋ لمحور الصادات $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ أو , في حالة البؤرة ∋ لمحور السينات $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ أما





د) الاختلاف المركزي $= \frac{1}{2}$ وطول محوره الصغير (12) وحدة

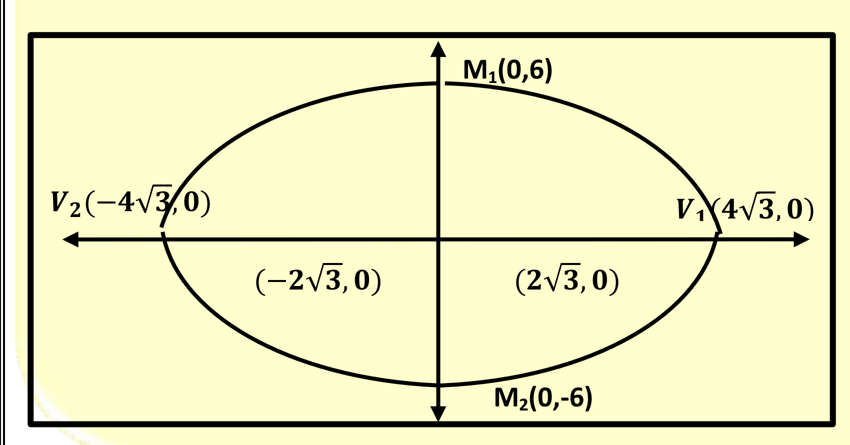
$\because e = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}a \Rightarrow c^2 = \frac{1}{4}a^2$

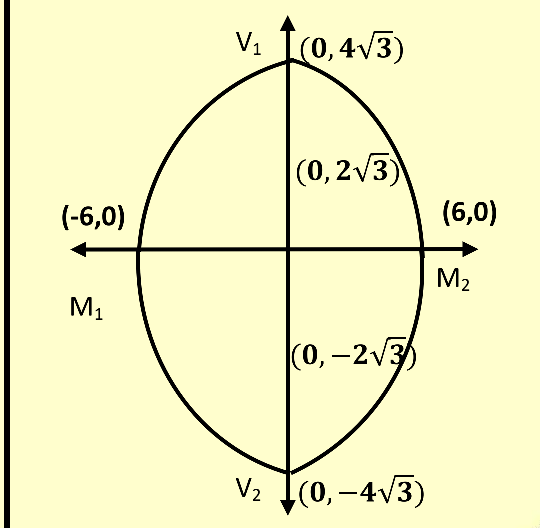
$\because 2b = 12 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow b^2 = 36$

$c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow \frac{1}{4}a^2 = a^2 - 36 \Longrightarrow \left[a^2 - \frac{1}{4}a^2 = 36\right] * 4 \Longrightarrow 4a^2 - a^2 = 144$

$\therefore 3a^2 = 144 \Rightarrow a^2 = 48$

أما $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$ أو $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{48} = 1$





هـ) المسافة بين بؤرتيه تساوي (8) وحدات، ونصف محوره الصغير يساوي (3) وحدات

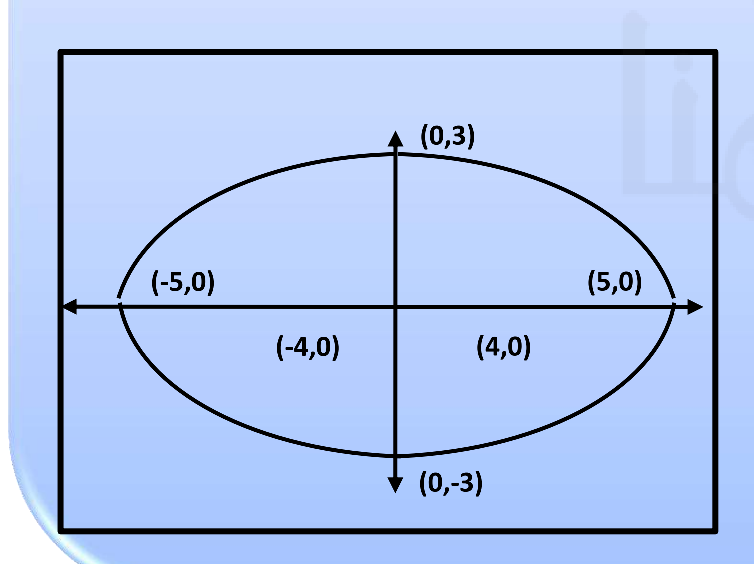
$\because 2c = 8 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow c^2 = 16$

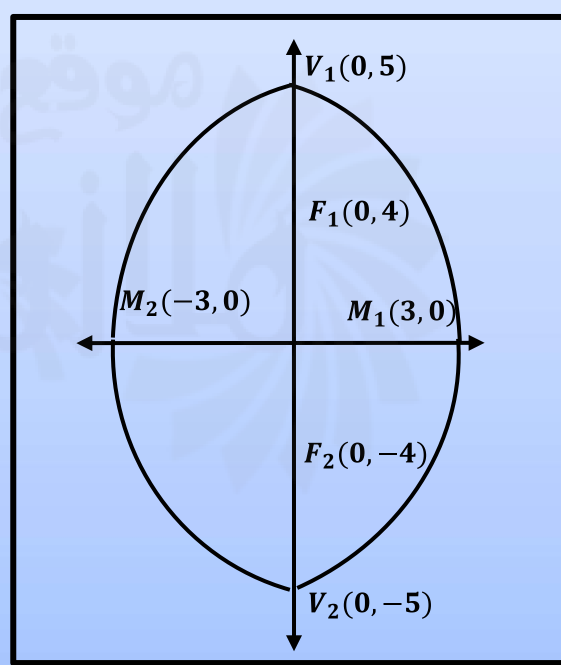
$\because \frac{1}{2}(2b) = 3 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow b^2 = 9$

$c^2 = a^2 - b^2$

$16 = a^2 - 9 \Rightarrow a^2 = 16 + 9 \Longrightarrow a^2 = 25$

أما $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ او $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$







3- باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص إذا علم

أ) بؤرتاه النقطتان (0 ± 2) ورأساه النقطتان $(0, \mp 3)$ ومركزه نقطة الأصل.

لنفرض ان النقطة $Q(x,y) \in$ للقطع

$QF_1 + QF_2 = 2a$

$a = 3 \Rightarrow 2a = 6$

$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2} + \sqrt{(x-o)^2+(y+2)^2} = 6$

$[\sqrt{x^2+(y-2)^2}]^2 = [6-\sqrt{x^2+(y+2)^2}]^2$ بالتربيع

$x^2 + (y-2)^2 = 36 - 12\sqrt{x^2+(y+2)^2} + x^2 + (y+2)^2$

$y^2 - 4y + 4 = 36 - 12\sqrt{x^2+(y+2)^2} + y^2 + 4y + 4$

$12\sqrt{x^2+(y+2)^2} = 36 + 4y + 4y$

$[12\sqrt{x^2+(y+2)^2} = 36 + 8y] \div 4$

$3\sqrt{x^2+(y+2)^2} = 9 + 2y$ بتربيع الطرفين

$9(x^2+(y+2)^2) = 81 + 36y + 4y^2$

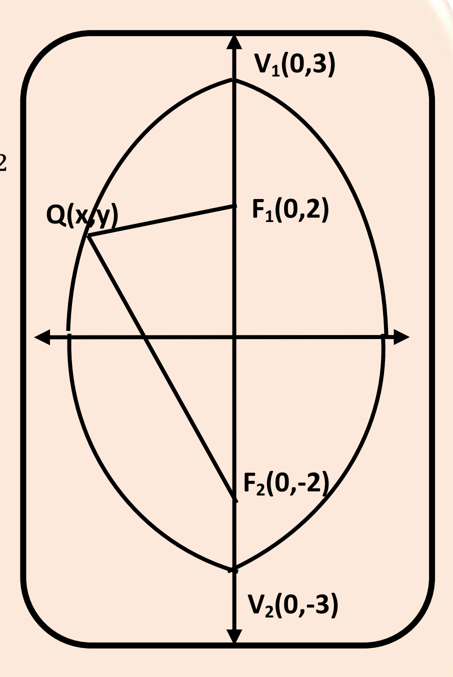
$9(x^2+y^2+4y+4) = 81 + 36y + 4y^2$

$9x^2 + 9y^2 + 36y + 36 = 81 + 36y + 4y^2$

$9x^2 + 9y^2 - 4y^2 = 81 - 36$

$9x^2 + 5y^2 = 45] \div 45$

$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص



ب) المسافة بين البؤرتين (6) وحدة والعدد الثابت (10) والبؤرتان تقعان على محور السينات ومركزه نقطة الأصل

$\because$ المسافة بين البؤرتين = 6

$\therefore 2c = 6 \Rightarrow c = 3$

(لأن البؤرتان $\in$ لمحور السينات)

$F_1(3,0), F_2(-3,0)$

العدد الثابت= طول المحور الكبير= $2a = 10$ وحدة

$QF_1 + QF_2 = 2a$

$\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x+3)^2+(y-0)^2} = 10$

$\sqrt{(x-3)^2+y^2} = 10 - \sqrt{(x+3)^2+y^2}$ بتربيع الطرفين

$(x-3)^2 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x+3)^2+y^2} + (x+3)^2 + y^2$

$x^2 - 6x + 9 = 100 - 20\sqrt{(x+3)^2+y^2} + x^2 + 6x + 9$

$20\sqrt{(x+3)^2+y^2} = 100 + 6x + 6x$

$20\sqrt{(x+3)^2+y^2} = 100 + 12x] \div 4$

$5\sqrt{(x+3)^2+y^2} = 25 + 3x$ بالتربيع

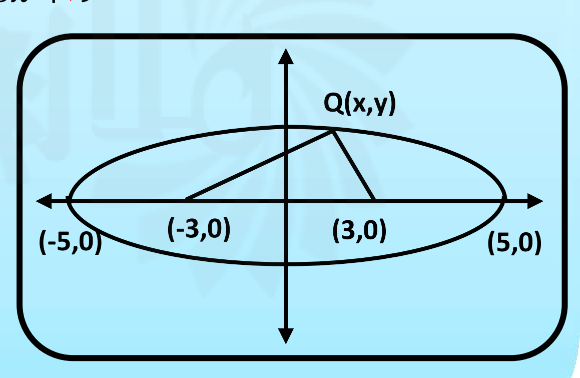
$25(x^2+6x+9+y^2) = 625 + 150x + 9x^2$

$25x^2 + 150x + 225 + 25y^2 = 625 + 150x + 9x^2$

$25x^2 - 9x^2 + 25y^2 = 625 - 225$

$16x^2 + 25y^2 = 400] \div 400$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص





٤ – جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 + 8x = 0$ علماً ان القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

يجب استخراج البؤرة من معادلة القطع المكافئ: $y^2 + 8x = 0$

بالمقارنة $y^2 = -8x \Longrightarrow y^2 = -4px$

بؤرة القطع المكافىء $-4p = -8 \Rightarrow p = 2 \Longrightarrow F(-2,0)$

∴ بؤرتي القطع الناقص هما $F_2(-2,0),\ F_1(2,0)$

$\therefore c = 2 \Rightarrow c^2 = 4$

∵ البؤرتان ∋ لمحور السينات ⟸ شكل المعادلة القياسي هو $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

∵ $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ∋ للقطع ∴ تحقق المعادلة $\frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{3})^2}{b^2} = 1$

$\frac{12}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1] * a^2b^2$

$12b^2 + 3a^2 = a^2b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow 4 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = 4 + b^2 \ldots\ldots\ldots(2)$ نعوض (٢) في (١)

$12b^2 + 3(4 + b^2) = b^2(4 + b^2)$

$12b^2 + 12 + 3b^2 = 4b^2 + b^4$

$4b^2 + b^4 - 12b^2 - 12 - 3b^2 = 0$

$b^4 - 11b^2 - 12 = 0$

$(b^2 - 12)(b^2 + 1) = 0$

أما $b^2 + 1 = 0 \Rightarrow b^2 = -1 \notin \mathbb{R}$ يهمل

أو $b^2 - 12 = 0 \Rightarrow b^2 = 12$ نعوض في (٢)

$a^2 = 4 + 12 \Rightarrow a^2 = 16$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

٥ - جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين (6,2) ،(3,4).

∵ البؤرتان ∋ لمحور السينات

∴ شكل المعادلة القياسي $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

∵ النقطة $(6,2)$ ∋ للقطع ∴ تحقق المعادلة $\frac{(6)^2}{a^2} + \frac{(2)^2}{b^2} = 1$

$\frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

∵النقطة $(3,4)$ ∋ للقطع ∴ تحقق المعادلة $\frac{(3)^2}{a^2} + \frac{(4)^2}{b^2} = 1$

$\frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

نضرب المعادلة $(1)* 4$

$\frac{144}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 4\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

بالطرح $\mp\frac{9}{a^2} \mp \frac{16}{b^2} = \mp 1\ldots\ldots\ldots(2)$

$\frac{135}{a^2} = 3 \Rightarrow 135 = 3a^2 \Rightarrow a^2 = 45$

نعوض في ١

$$\frac{36}{45}+\frac{4}{b^2}=1$$

$$\frac{4}{b^2}=1-\frac{36}{45} \Longrightarrow \frac{4}{b^2}=\frac{45-36}{45} \Rightarrow \frac{4}{b^2}=\frac{9}{45} \Longrightarrow \frac{4}{b^2}=\frac{1}{5} \Longrightarrow b^2=20$$

$\therefore \frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ معادلة القطع الناقص

٦- جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2=12x$

∵ البؤرتان نقطتا تقاطع المنحني مع محور الصادات $\Leftarrow x=0$ (نعوض في معادلة المنحني)

$$\therefore (0)^2+y^2-3(0)=16 \Rightarrow y^2=16 \Rightarrow y=\mp 4$$

اذن البؤرتان هما $F_1(0,-4), F_2(0,4) \Longrightarrow c=4 \Rightarrow c^2=16$

∵ القطع الناقص يمس دليل القطع المكافئ $y^2=12x$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $y^2=4px$

معادلة الدليل $\therefore 4p=12 \Rightarrow p=3 \Rightarrow x=-3$

∵ القطع الناقص يمس دليل القطع المكافئ عند $x=-3$ والبؤرتان صادية اذن تمثل الاقطاب

$$\therefore b=3 \Rightarrow b^2=9$$

$$c^2=a^2-b^2 \Longrightarrow 16=a^2-9 \Longrightarrow a^2=16+9 \Rightarrow a^2=25$$

∵ البؤرتان ∋ لمحور الصادات ∴ شكل المعادلة القياسية

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ معادلة القطع الناقص

٧- جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان إلى محور السينات ومركزه في نقطة الأصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2+8x=0$ عند النقطة التي أحداثيها السيني (-2).

∵ طول المحور الكبير ضعف طول المحور الصغير

$$\therefore 2a=2(2b)] \div 2$$

$$a=2b \Rightarrow a^2=4b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

∵ القطع الناقص يقطع القطع المكافىء $y^2+8x=0$ عند النقطة $x=-2$

∴ نعوض -2 بدل x في معادلة القطع المكافيء حتى نستخرج y.

$$\therefore y^2+8(-2)=0 \Rightarrow y^2-16=0 \Rightarrow y^2=16 \Rightarrow y=\mp 4$$

∴ النقاط التي يمر بها القطع الناقص هما $(-2,4),(-2,-4)$

∵ البؤرتين ∋ لمحور السينات

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

∵ $(-2,4)$ ∋ للقطع ∴ تحقق معادلته

$$\frac{(-2)^2}{a^2}+\frac{(4)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{4}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

نعوض (1) في (2)

$$\frac{4}{4b^2}+\frac{16}{b^2}=1$$

نعوض في (1)

$$\frac{1}{b^2}+\frac{16}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{17}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=17$$

$$a^2=4(17) \Rightarrow a^2=68$$

$\frac{x^2}{68}+\frac{y^2}{17}=1$ معادلة القطع الناقص

٨- قطع ناقص معادلته $hx^2 + ky^2 = 36$ ومركزه نقطة الأصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{3}\,x$ ما قيمة كل من h, k ؟

نستخرج بؤرتي القطع الناقص من بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته هي $y^2 = 4\sqrt{3}x$

بالمقارنة مع $y^2 = 4px$

$4p = 4\sqrt{3} \Rightarrow p = \sqrt{3}$

$\therefore F(\sqrt{3}, 0)$ بؤرة القطع المكافئ

$\therefore c = \sqrt{3} \Rightarrow c^2 = 3$ بؤرتا القطع الناقص هما $(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0)$

$\because$ مجموع مربعي طولي محوريه $= 60$

$\therefore (2a)^2 + (2b)^2 = 60$

$[4a^2 + 4b^2 = 60] \div 4$

$a^2 + b^2 = 15 \Rightarrow a^2 = 15 - b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

$\therefore$ نعوض 1 في 2 ينتج

$3 = (15 - b^2) - b^2$

$3 = 15 - 2b^2$

$2b^2 = 15 - 3 \Rightarrow 2b^2 = 12 \Rightarrow b^2 = 6$

نعوض في (1)

$a^2 = 15 - 6 \Rightarrow a^2 = 9$

معادلة القطع الناقص

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$

$[hx^2 + ky^2 = 36] \div 36$

$\frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1$

$\because$ البؤرتان $\in$ لمحور السينات $\therefore$ شكل المعادلة القياسية هو

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\because \frac{36}{h} = 9 \Rightarrow 9h = 36 \Rightarrow h = \frac{36}{9} \Rightarrow h = 4$

$\because \frac{36}{k} = 6 \Rightarrow 6k = 36 \Rightarrow k = \frac{36}{6} \Rightarrow k = 6$

٩ - جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة.

نستخرج بؤرتي القطع الناقص من بؤرة القطع المكافئ $\because x^2 = 24y$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $x^2 = 4py$

$\therefore 4p = 24 \Rightarrow p = \frac{24}{4} \Rightarrow p = 6$

$\therefore F(0,6)$ بؤرة القطع المكافئ

$\therefore$ بؤرتي القطع الناقص هما $F_1(0,6), F_2(0,-6)$

$\therefore c = 6 \Rightarrow c^2 = 36$

$\because$ بما ان مجموع طولي محوريه (36) وحدة

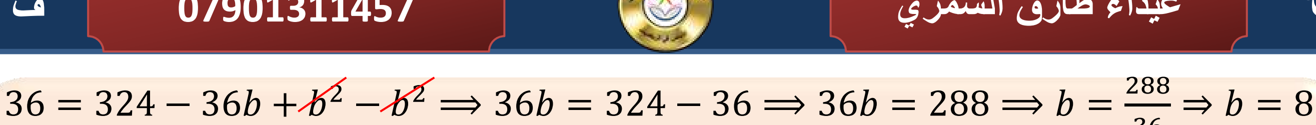
$\therefore 2a + 2b = 36] \div 2$

$a + b = 18 \Rightarrow a = 18 - b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

$\therefore$ نعوض (1) في (2) ينتج

$c^2 = (18 - b)^2 - b^2$



$36 = 324 - 36b + b^2 - b^2 \Rightarrow 36b = 324 - 36 \Rightarrow 36b = 288 \Rightarrow b = \frac{288}{36} \Rightarrow b = 8$

$\Longrightarrow b^2 = 64$

$a = 18 - 8$ نعوض في (1)

$a = 10 \Longrightarrow a^2 = 100$

$\therefore \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Longrightarrow \therefore \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ ∵ البؤرتان ∋ لمحور الصادات

١٠- جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_2(-4,0), F_1(4,0)$ والنقطة Q ∋ للقطع الناقص بحيث ان محيط $QF_1F_2 = 24$ وحدة

محيط لمثلث = مجموع أطوال أضلاعه $24 = QF_1 + QF_2 + F_1F_2$............(1)

[بما ان طول قاعدة المثلث هي المسافة بين البؤرتين = 2c و $QF_1 + QF_2 = 2a$]

بالتعويض في (1) $\therefore [24 = 2a + 2c] \div 2$

$12 = a + C$

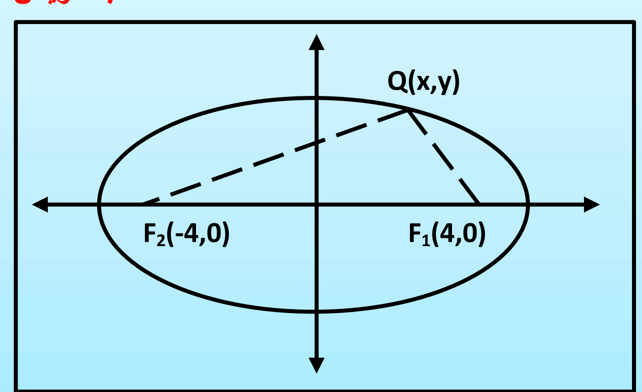
∵ بؤرتي القطع هما $\mp(4,0) \Longleftarrow c = 4$

$\therefore 12 = a + 4$

$a = 12 - 4 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow a^2 = 64$

$\because c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 16 = 64 - b^2$

$\therefore b^2 = 64 - 16 \Longrightarrow b^2 = 48$



∵ البؤر ∋ لمحور السينات ∴ شكل المعادلة $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$

اسئلة وزارية

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه ∋ لمحور السينات ومركزه نقطة الأصل ومساحة منطقته (7π)وحدة مربعة ومحيطه (10π)

$\because A = ab\pi$ (مساحة قطع ناقص)

$\therefore 7\pi = ab\pi \Rightarrow ab = 7 \Longrightarrow a = \frac{7}{b}$ ....(1)

$\because P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (محيط القطع الناقص) $\Longrightarrow 10\pi = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{7}{b}\right)^2+b^2}{2}} \;] \div 2\pi$

$5 = \sqrt{\frac{\frac{49}{b^2}+b^2}{2}} \Rightarrow 5 = \sqrt{\frac{\frac{49+b^4}{b^2}}{2}} \Longrightarrow 5 = \sqrt{\frac{49+b^4}{2b^2}}$ بتربيع الطرفين

$25 = \frac{49 + b^4}{2b^2} \Rightarrow 49 + b^4 = 50b^2 \Longrightarrow b^4 - 50b^2 + 49 = 0 \Longrightarrow (b^2 - 49)(b^2 - 1) = 0$

أما $b^2 - 49 = 0 \Rightarrow b^2 = 49 \Rightarrow a^2 = \frac{49}{49} \Rightarrow a^2 = 1$ [تهمل لان $a < b$]

أو $b^2 - 1 = 0 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{49}{1} \Rightarrow a^2 = 49 \Longrightarrow \therefore \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1$

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوراه على المحورين الأحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طوله (8 وحدات) ومساحة منطقته (24π). وحدة مساحة.

$A = ab\pi$ (مساحة القطع الناقص)

$24\pi = ab\pi \Rightarrow ab = 24$.......................(1)

الجزء المقطوع من محور السينات يمثل أما المحور الكبير $(2a)$ أو المحور الصغير $(2b)$

إذا كان $2a = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow 4b = 24 \Longrightarrow b = 6$ نعوض في (1)

وهذا لا يمكن لأن قيمة a يجب ان تكون أكبر من قيمة b إذن يهمل ويؤخذ الأحتمال الثاني وهو

$2b = 8 \Rightarrow b = 4 \Longrightarrow 4a = 24 \Longrightarrow a = 6$ نعوض في (1)

∵ الجزء المقطوع من محور السينات هو المحور الصغير ∴ البؤرتين ∋ لمحور الصادات

∴ شكل المعادلة القياسية $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Longleftarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$

اسئلة اثرائية

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1(0,4), F_2(0,-4)$ والنقطة $Q(b,0) \in$ للقطع بحيث ان مساحة المثلث $F_1F_2Q = 12$ وحدة مساحة.

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

$A = \frac{1}{2}(2c)(b)$

$\therefore c = 4$ من البؤر

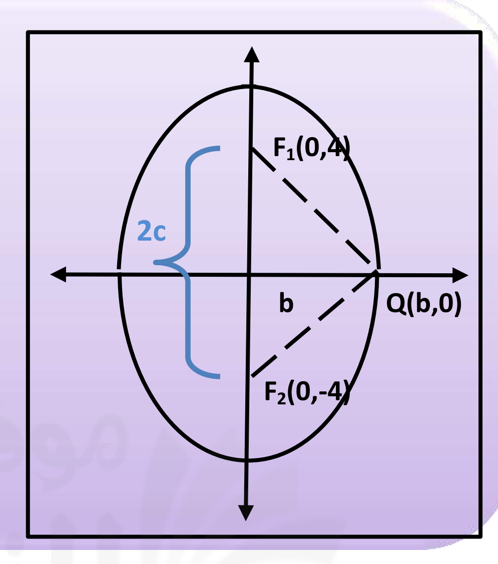
$\therefore 12 = 4b \Rightarrow b = 3 \Rightarrow b^2 = 9$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 16 = a^2 - 9 \Rightarrow a^2 = 16 + 9$

$\Rightarrow a^2 = 25$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ∵ البؤرتين ∋ لمحور الصادات ∴ شكل المعادلة

$\therefore \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$



س / جد معادلة القطع الناقص الذي محوراه تنطبق على المحورين الأحداثيين ومركزه نقطة الأصل ومحوره الكبير $y - axis$ والفرق بين طولي محوريه = (4 وحدات) والمسافة بين البؤرتين($4\sqrt{3}$ وحدة).

∵ محوره الكبير هو محور الصادات ∴ البؤرتين ∋ لمحور الصادات. ∴ شكل المعادلة هو $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

∵الفرق بين طولي محوريه (4 وحدات) $[2b < 2a]$

$\therefore 2a - 2b = 4 \rceil \div 2$

$a - b = 2 \Rightarrow a = 2 + b$.................(1)

$\because 2c = 4\sqrt{3} \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$

$c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow (2\sqrt{3})^2 = (2 + b)^2 - b^2 \Longrightarrow 12 = 4 + 4b + b^2 - b^2$

$\Longrightarrow 4b = 12 - 4 \Rightarrow 4b = 8 \Rightarrow b = 2 \Longrightarrow b^2 = 4$

$\therefore a = 2 + 2 \Rightarrow a = 4$ نعوض في (1) $\Longrightarrow a^2 = 16$

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ (معادلة القطع الناقص)

س/ لتكن $Lx^2+4y^2=36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $(0,\sqrt{3})$ جد قيمة L

$Lx^2+4y^2=36]\div 36$

$\frac{x^2}{\frac{36}{L}}+\frac{y^2}{\frac{36}{4}}=1 \Longrightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{L}}+\frac{y^2}{9}=1$

$\because$ البؤرة $\in$ لمحور الصادات $\therefore$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$\therefore a^2=9\ ,\quad b^2=\frac{36}{L}\quad ,\quad c=\sqrt{3}\Rightarrow c^2=3$

$\because c^2=a^2-b^2 \Longrightarrow 3=9-\frac{36}{L}\Rightarrow \frac{36}{L}=9-3\Longrightarrow \frac{36}{L}=6\Rightarrow 6L=36\Rightarrow L=6$

س/ القطع الناقص $m^2x^2+3y^2=3m^2$ بؤرتاه تقعان على محور الصادات والمسافة بينهما تساوي المسافة بين بؤرة القطع المكافئ $y^2+4\sqrt{6}x=0$ ودليله جد قيمة m الحقيقية.

نجد المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله وهي $2p$

$y^2+4\sqrt{6}x=0 \Longrightarrow y^2=-4\sqrt{6}x$

$y^2=-4px$ بالمقارنة مع $\Longrightarrow -4p=-4\sqrt{6}\ \Longrightarrow p=\sqrt{6}$

$\therefore F(-\sqrt{6},0)$ بؤرة القطع المكافئ

$x=\sqrt{6}$ معادلة الدليل

$(\sqrt{6}+\sqrt{6}=2\sqrt{6})$ المسافة بين البؤرة والدليل

$\therefore 2c=2\sqrt{6}\Rightarrow c=\sqrt{6}\Rightarrow c^2=6$

$\because m^2x^2+3y^2=3m^2]\div 3m^2$

$\frac{x^2}{\frac{3m^2}{m^2}}+\frac{y^2}{\frac{3m^2}{3}}=1 \ \Longrightarrow \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{m^2}=1$

$\because$ البؤرتان $\in$ لمحور الصادات $\therefore$ شكل المعادلة القياسي $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$\therefore b^2=3\ ,a^2=m^2\ ,c^2=6$

$\therefore c^2=a^2-b^2\Rightarrow 6=m^2-3\Rightarrow m^2=9\Longrightarrow m=3$

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي أحدى بؤرتيه (0,5) والنسبة بين المسافة بين البؤرتين وطول محوره الأكبر $=\frac{5}{8}$

$\because$ البؤرتين $\in$ لمحور الصادات $\therefore$ شكل المعادلة $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

النسبة بين المسافة بين البؤرتين وطول المحور الأكبر $=\frac{5}{8}$

$\therefore \frac{2c}{2a}=\frac{5}{8}\Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{5}{8}$...........(1)

$\because c=5$ نعوض في (١)

$\frac{5}{a}=\frac{5}{8}\Rightarrow 5a=40\Rightarrow a=8$

$\therefore c^2=25\quad ,\quad a^2=64$

$\because c^2=a^2-b^2\Longrightarrow 25=64-b^2\Rightarrow b^2=64-25\Longrightarrow b^2=39$

$\therefore \frac{x^2}{39}+\frac{y^2}{64}=1$ (معادلة القطع الناقص)



س/ جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه $F_1(4,0)$ وتبعدعن إحدى نقطتي تقاطعه مع محور $y-axis$ بالعدد (5)

$(MF)^2=(MO)^2+(OF)^2$ من قانون فيثاغورس

$(5)^2=b^2+(4)^2 \Longrightarrow 25=b^2+16 \Longrightarrow b^2=25-16 \Longrightarrow b^2=9$

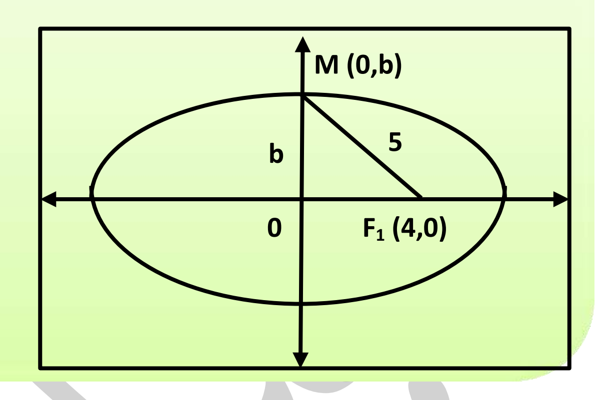
$\therefore c=4 \Rightarrow c^2=16$

$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 16=a^2-9$

$a^2=16+9 \Rightarrow a^2=25$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ∵ البؤرة ∋ لمحور السينات ∴ شكل المعادلة القياسي

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ معادلة القطع الناقص



س/ جد معادلة القطع الناقص الذي أضلاع المستطيل $abcd$ مماسات له حيث

$a(4,3)$, $b(-4,3)$, $c(-4,-3)$, $d(4,-3)$

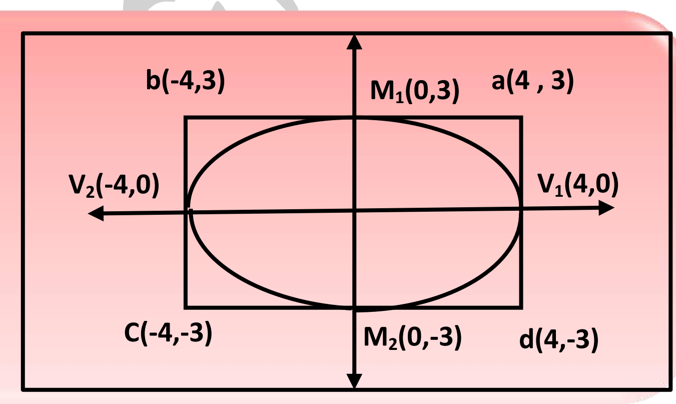
من الرسم يتضح لنا

$a=4 \Rightarrow a^2=16$

$b=3 \Rightarrow b^2=9$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (وذلك لان المحور الكبير∋ لمحور السينات)

$\therefore \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$



س/ إذا كانت F_1 هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2=16x$ وكانت F_2 هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $x^2=-8y$ جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه F_1 ويمر بالنقطة F_2.

نستخرج البؤرة الاولى للقطع الناقص من معادلة القطع المكافىء الاولى ونستخرج البؤرة الثانية للقطع الناقص من معادلة القطع المكافىء الثانية فتكون نقطة تنتمي للقطع الناقص اذن تحقق معادلته

$\because y^2=16x \quad , \quad y^2=4px$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\therefore 4p=16 \Rightarrow p=4 \Rightarrow F(4,0)$ بؤرة القطع المكافىء

$F_2(-4,0), F_1(4,0)$ ∴ بؤرتا القطع الناقص هما

$\therefore c=4 \Rightarrow c^2=16$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ....(1)$ ∵ البؤرتان ∋ لمحور السينات ∴ شكل المعادلة القاسية

$\because x^2=-8y \quad , \quad x^2=-4py$ بالمقارنة مع

$\therefore -4p=-8 \Rightarrow p=2 \Rightarrow F(0,2)$

∵ $(0,2)$ نقطة ∋ للقطع الناقص ∴ تمثل قطب بالنسبه للقطع الناقص



$b = 2 \Rightarrow b^2 = 4 \Longrightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 16 = a^2 - 4 \Rightarrow a^2 = 20$

$\therefore \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$ معادلة القطع الناقص

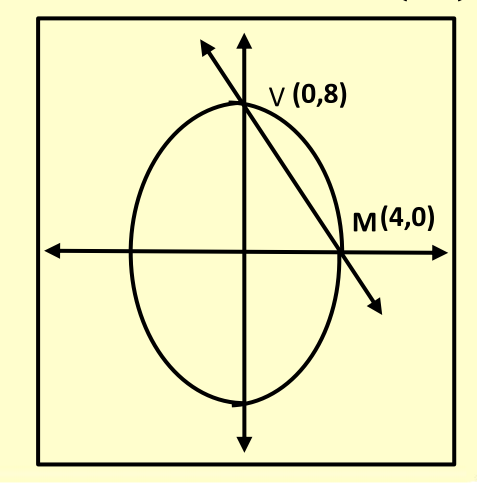
س / جد معادلة القطع الناقص الذي يمر بنقطتي تقاطع المستقيم الذي معادلته $2x + y = 8$ مع المحورين الأحداثيين ومركزه نقطة الأصل

∵ المستقيم يتقاطع مع المحورين ∴ تستخرج نقاط التقاطع مع كل محور.

a) نقطة تقاطع محور الصادات $x = 0 \Rightarrow 2(0) + y = 8 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow (0,8)$

b) نقطة تقاطع محور السينات $y = 0 \Rightarrow 2x + 0 = 8 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \Longrightarrow (4,0)$

(∵قيمة y > قيمة x ∴ البؤرتان ∈ لمحور الصادات)



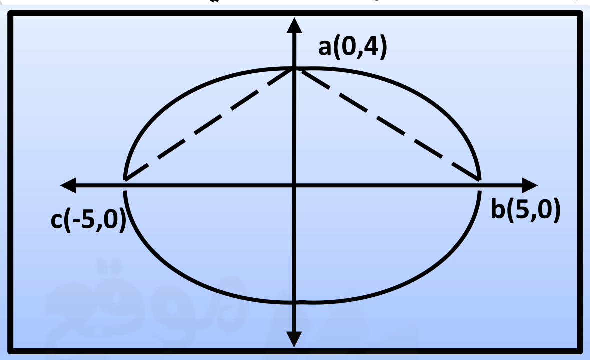
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ∴ شكل المعادلة القياسي

$\therefore a = 8 \Rightarrow a^2 = 64$

$b = 4 \Rightarrow b^2 = 16$

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$ معادلة القطع الناقص

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي يمر برؤوس المثلث abc حيث $a(0,4), b(5,0), c(-5,0)$



$a = 5 \Rightarrow a^2 = 25$

$b = 4 \Rightarrow b^2 = 16$

∵ القيمة الأكبر تقع على محور السينات

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ∴ شكل المعادلة القياسي

$\therefore \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

س/ قطع ناقص مساحته $88\ unit^2$ وإذا كانت نقطة تقاطع محوريه في نقطة الأصل وأحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ $(y^2 = 28x)$ جد معادلته.

$\because y^2 = 28x$ نستخرج بؤرة القطع المكافيء لتمثل رؤوس القطع الناقص

$y^2 = 4px$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\therefore 4p = 28 \Rightarrow p = 7 \Rightarrow F(7,0)$ بؤرة القطع المكافيء

$V_2(-7,0), V_1(7,0)$ ∴ رأسا القطع الناقص هما $\Longrightarrow a = 7 \Rightarrow a^2 = 49$

$\because A = ab\pi$

$\therefore 88 = \cancel{7}b\left(\frac{22}{\cancel{7}}\right)$ $\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$

$88 = 22b \Rightarrow b = 4 \Rightarrow b^2 = 16$

∵ رأسا القطع ∈ لمحور السينات ∴ معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} = 1$

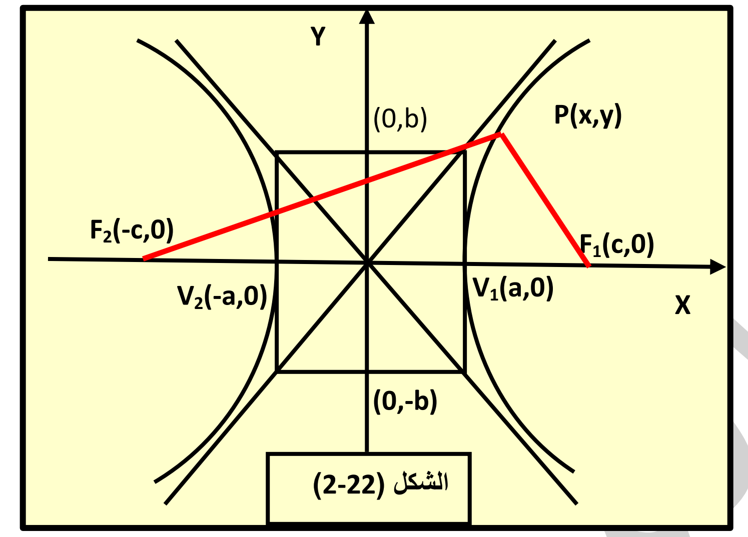
وزاري: إذا كان $\frac{4+2i}{1-i} = e + di$ جد معادلة قطع ناقص الذي بؤرته $(0, d)$ وطول محوره الكبير $2\|e + di\|$.

اثرائي: النقطة $(\frac{1}{3}, 2)$ ∋ للقطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته ∋ لمحور السينات والتي هي إحدى بؤرتي القطع الناقص والنسبة بين طولي محوريه $(\frac{5}{4})$ جد معادلة كل من القطعين المكافئ والناقص.

اثرائي: جد معادلة قطع ناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ وطول المحور الكبير يساوي ثلاث امثال طول المحور الصغير.

القطع الزائد

تعريف: القطع الزائد هو مجموعة النقط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي أي منها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) يساوي عدداً ثابتا.



الشكل (2-22)

البؤرتان هما $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$ الرأسان هما $V_1(a, 0), V_2(-a, 2)$ والنقطة $P(x, y)$ نقطة من نقاط منحني القطع الزائد ومن التعريف

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

حيث $2a$ عدداً ثابتاً يمثل طول المحور الحقيقي للقطع الزائد الذي تقع عليه البؤرتين والرأسين وكل من PF_1, PF_2 يسميان طولي نصفي القطرين البؤريين المرسومين من نقطة (P) والمسافة F_1, F_2 هي البعد بين البؤرتين وتساوي $2c$ وطول المحور المرافق أو التخيلي هو $(2b)$ (وهو المحور العمودي على المحور الحقيقي والمار بمركز القطع).

معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل.

من الشكل $(2-22)$ وتبعاً لتعريف القطع الزائد

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$$\Rightarrow PF_1 - PF_2 = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

وبتربيع الطرفين كما مر في معادلة القطع الناقص الذي مركزه الأصل والبؤرتان على محور السينات نحصل على المعادلة:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \quad , \quad c > 0 \,,\, a > 0 \,,\, c > a \quad \text{فإن} \quad c^2 - a^2 > 0$$

بفرض ان $b^2 = c^2 - a^2$

وبتعويض عن $a^2 - c^2 = -b^2$ في المعادلة القياسية نحصل على:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

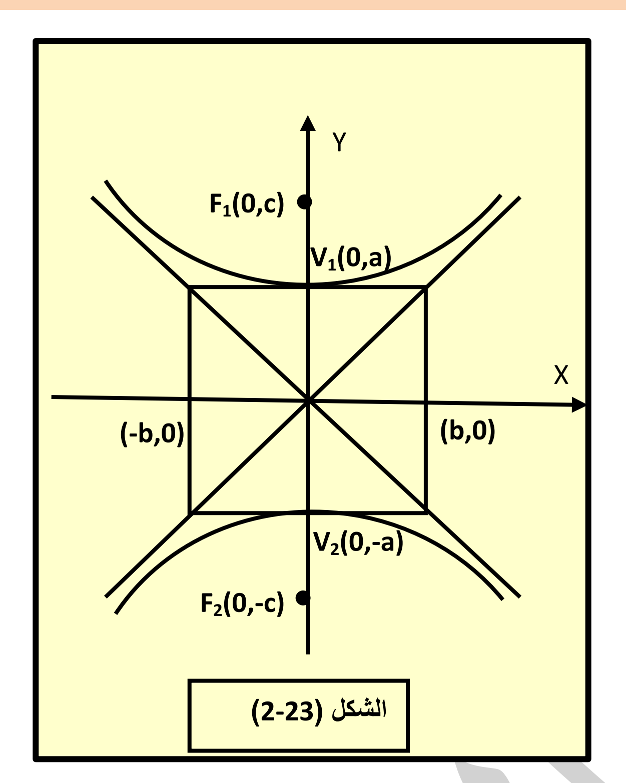
ملاحظة:
- في القطع الزائد مقام الحد الموجب دائماً يمثل (a^2) ومقام الحد الآخر يمثل (b^2) وهنا لا نعتمد على العدد الأكبر.
- في القطع الزائد $c > a, b$ أما في القطع الناقص $a > b, c$

معادلة القطع الزائد الذي بؤرته على محور الصادات ومركزه نقطة الأصل.

إذا كانت البؤرتان على محور الصادات ومحور السينات هو العمود على $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ من نقطة الاصل وبنفس الطريقة السابقة نجد المعادلة القياسية للقطع الزائد وهي :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$



الشكل (2-23)

ملاحظة:

الاختلاف المركزي e للقطع الزائد يكون اكبر من واحد أي $e = \frac{c}{a} > 1$

طريقة رسم القطع الزائد Graph the Hyperbola :

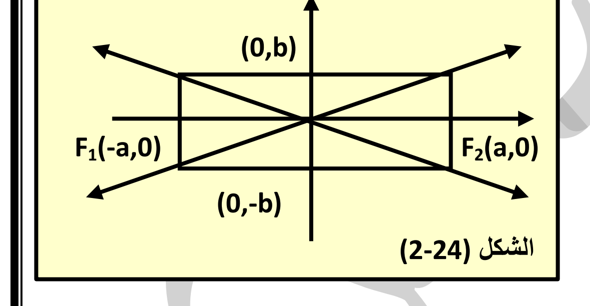
لتكن $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ معادلة قطع زائد بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ولرسم هذا المقطع :

١- نعين النقطتين $(a, 0), (-a, 0)$.

٢- نعين النقطتين $(0, -b), (0, b)$

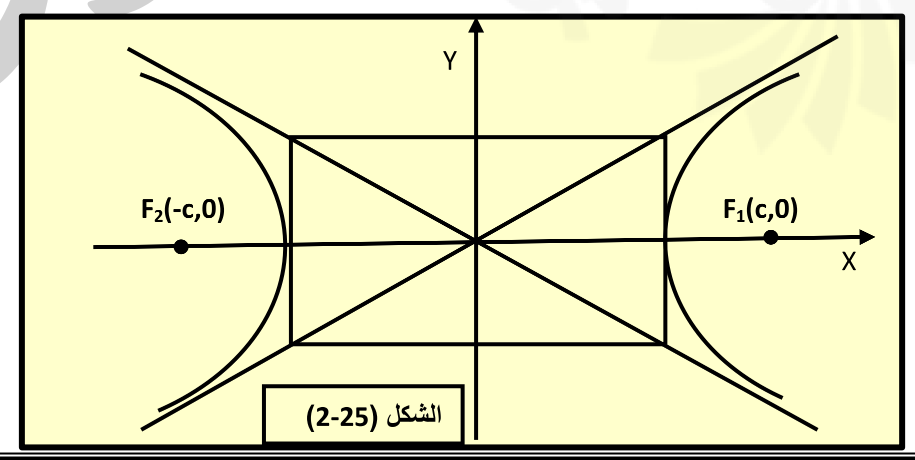
٣- نكون مستطيلاً من هذه النقط أضلاعه توازي المحورين كما في الشكل $(2-24)$

٤- نرسم قطري المستطيل كما في الشكل $(2-24)$ فهما يمثلان المستقيمين المحاذيين لمنحنى القطع الزائد



الشكل (2-24)


٥- نعين البؤرتين $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$ ثم نرسم ذراعي القطع الزائد كما في الشكل (2-25)



الشكل (2-25)

مثال عين البؤرتين والرأسين وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق للقطع الزائد ثم ارسمه $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

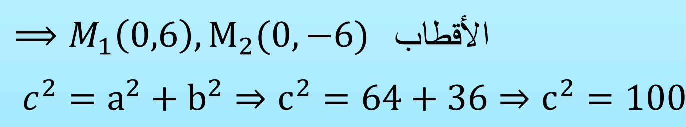
ملاحظة: في القطع الزائد تتغير أماكن y, x وليس b, a وبما أن x في البداية و هو عدد موجب إذن الرؤوس والبؤر ∋ لمحور السينات

∴ بالمقارنة مع المعاملة القياسية $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

طول المحور الحقيقي $a^2=64 \Rightarrow a=8 \Rightarrow 2a=16$

الرؤوس $\Longrightarrow V_1(8,0), V_2(-8,0)$

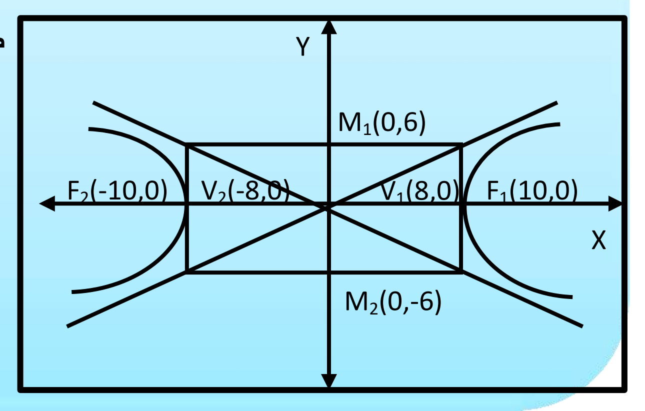
طول المحور المرافق $b^2=36 \Rightarrow b=6 \Rightarrow 2b=12$



الأقطاب $\Longrightarrow M_1(0,6), M_2(0,-6)$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=64+36 \Rightarrow c^2=100$

البؤرتان $\Rightarrow c=10 \Longrightarrow F_1(10,0), F_2(-10,0)$



مثال جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره الحقيقي = 6 وحدات والأختلاف المركزي = 2 والبؤرتان على محور السينات

$\because 2a=6 \Rightarrow a=3 \Rightarrow a^2=9$

$e=\frac{c}{a}$ الاختلاف المركزي $\Longrightarrow 2=\frac{c}{3} \Rightarrow c=6 \Rightarrow c^2=36$

$\because c^2=a^2+b^2 \Longrightarrow 36=9+b^2 \Rightarrow b^2=36-9 \Longrightarrow b^2=27$

∵ البؤرتان ∋ لمحور السينات ∴ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$ (معادلة القطع الزائد)

مثال جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره المرافق (4 وحدات) وبؤرتاه هما النقطتان $F_1(0,\sqrt{8}), F_2(0,-\sqrt{8})$

∵ المحور المرافق = 4 وحدات $\therefore 2b=4 \Rightarrow b=2 \Rightarrow b^2=4$

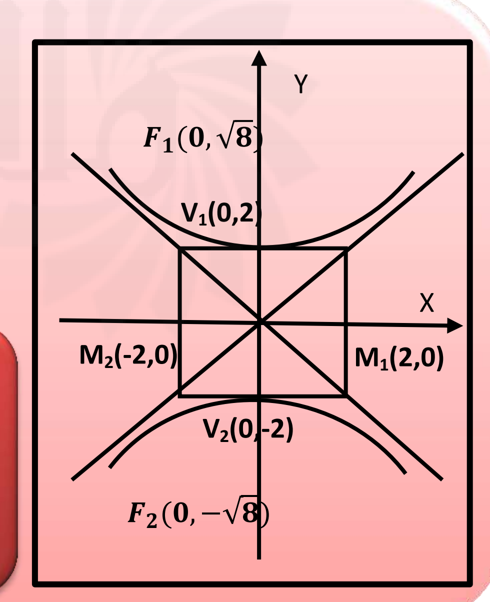
(من البؤرتان) $\because c=\sqrt{8} \Rightarrow c^2=8$

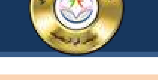
$\because c^2=a^2+b^2 \Longrightarrow 8=a^2+4 \Rightarrow a^2=8-4 \Rightarrow a^2=4$

∵ البؤرتان ∋ لمحور الصادات $\therefore \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

$\therefore \frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$ (معادلة القطع الزائد)

ملاحظة : في هذا المثال طول المحور الحقيقي يساوي طول المحور المرافق في هذه الحالة يدعى القطع الزائد بـ(القطع القائم) أو (المتساوي الأضلاع) وذلك لأن النقاط الأربعة تشكل رؤوس مربع ويكون الأختلاف المركزي (e) مقدار ثابت قيمته $(\sqrt{2})$





تـمـاريـن [2 – 3]

١ - عين كل من البؤرتين والرأسين، ثم جد طول كل المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة الآتية:

a) $12x^2 - 4y^2 = 48$

نقسم على قيمة العدد الثابت في الطرف الأيمن $[12x^2 - 4y^2 = 48] \div 48$

$\frac{x^2}{\frac{48}{12}} - \frac{y^2}{\frac{48}{4}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (بالمقارنة مع المعادلة القياسية)

$\therefore a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2a = 4$ طول المحور الحقيقي

$V_1(2,0), V_2(-2,0)$

$b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3} \Rightarrow 2b = 4\sqrt{3}$ طول المحور المرافق

$M_1(0,2\sqrt{3}), M_2(0,-2\sqrt{3})$ الأقطاب

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 12 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

$F_1(4,0), F_2(-4,0)$ البؤرتين

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2 > 1$ الاختلاف المركزي

b) $16x^2 - 9y^2 = 144$

بقسمة كل الحدود على 144 نحصل على $\frac{x^2}{\frac{144}{16}} - \frac{y^2}{\frac{144}{9}} = 1$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\therefore a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 2a = 6$ طول المحور الحقيقي $\Rightarrow V_1(3,0), V_2(-3,0)$ الرأسين

$\because b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 2b = 8$ طول المحور المرافق $\Rightarrow M_1(0,4). M_2(0,-4)$ القطبين

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 16 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow F_1(5,0), F_2(-5,0)$ البؤرتين

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{5}{3} > 1$ الاختلاف المركزي

٢ – أكتب معادلة القطع الزائد في الحالات الآتية ثم أرسم القطع:

أ) البؤرتان هما النقطتان $(\mp 5, 0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $(x = \mp 3)$ ومركزه نقطة الأصل.

$\because$ البؤرتان $\in$ لمحور السينات $\therefore$ شكل المعادلة $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\because$ القطع يتقاطع مع محور السينات عند $x = \mp 3$

$\therefore$ $(\mp 3, 0)$ تمثل رؤوس القطع الزائد

$\therefore a = 3 \quad , \quad c = 5$ من البؤر

$\Rightarrow a^2 = 9 \quad , \quad c^2 = 25$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2$

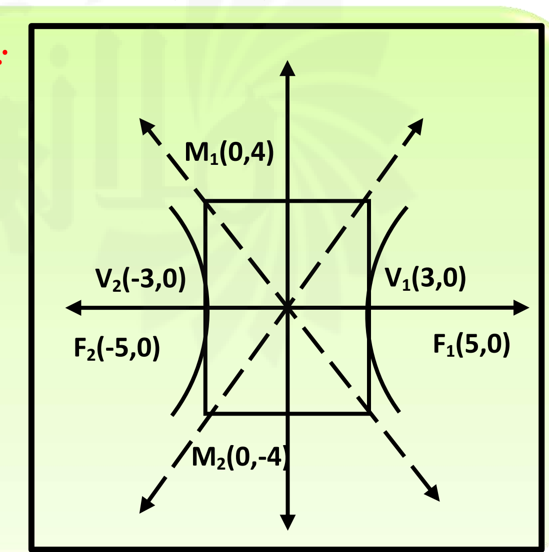
$\Rightarrow b^2 = 25 - 9 \Rightarrow b^2 = 16$

$\therefore \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الزائد

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow V_1(3,0), V_2(-3,0)$ الرؤوس

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow M_1(0,4), M_2(0,-4)$ الأقطاب

$F_1(5,0), F_2(-5,0)$ من السؤال



ب) طول المحور الحقيقي (12 وحدة) وطول المحور المرافق (10) وينطبق محوراه على المحورين الأحداثيين ومركزه نقطة الأصل

$2a = 12 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a^2 = 36$

$2b = 10 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow b^2 = 25 \Rightarrow c^2 = 36 + 25 = 61$

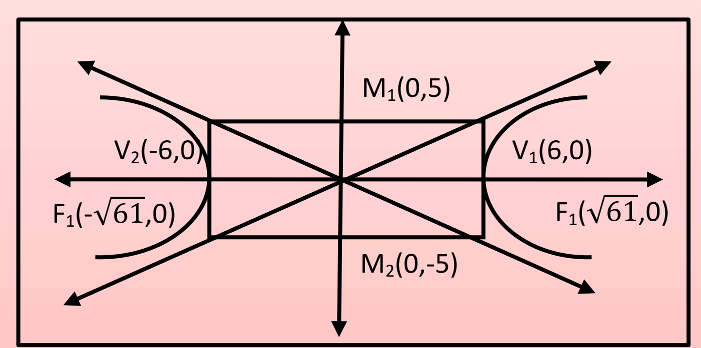
يوجد احتمالين للمعادلة: a) على محور السينات

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$

$V_1(6,0), V_2(-6,0)$ الرؤوس

$M_1(0,5), M_2(0,-5)$ الأقطاب

$F_1(\sqrt{61},0), F_2(-\sqrt{61},0)$ البؤرتين



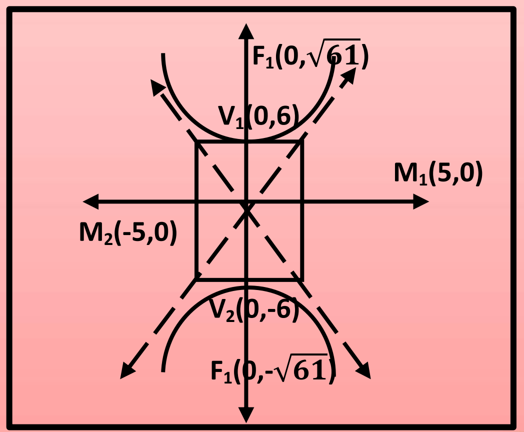
b) على محور الصادات

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1$

$V_1(0,6), V_2(0,-6)$

$F_1(0,\sqrt{61}), F_2(0,-\sqrt{61})$

$M_1(5,0), M_2(-5,0)$



٣- جد باستخدام التعريف معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتيه $(-2\sqrt{2},0)(2\sqrt{2},0)$ وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي أية نقطة عن بؤرتيه يساوي *4* وحدات.

$|PF_1 - PF_2| = 2a$

$\left|\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2 + y^2} - \sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2}\right| = 4$

$\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2 + y^2} - \sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2} = \mp 4$

$\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2 + y^2} = \mp 4 + \sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2}$ بتربيع الطرفين

$(x-2\sqrt{2})^2 + \cancel{y^2} = 16 \mp 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2} + (x+2\sqrt{2})^2 + \cancel{y^2}$

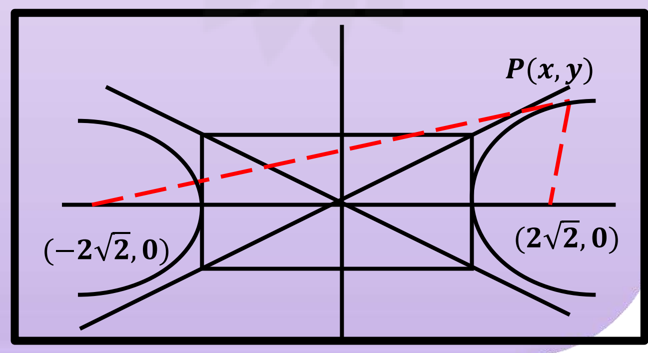
$\cancel{x^2} - 4\sqrt{2}x + \cancel{8} = 16 \mp 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2} + \cancel{x^2} + 4\sqrt{2}x + \cancel{8}$

$\mp 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2} = 16 + 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}x$

$\mp 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2} = 16 + 8\sqrt{2}x \quad] \div 8$

$\mp \sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2} = 2 + \sqrt{2}\,x$ بتربيع الطرفين

$\left((x+2\sqrt{2})^2 + y^2\right) = 4 + 4\sqrt{2}x + 2x^2$



$x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2 = 4 + 4\sqrt{2}x + 2x^2$
$x^2 - 2x^2 + y^2 = 4 - 8$
$[-x^2 + y^2 = -4] \div -4 \Longrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

ملاحظة:القطع الزائد هو قطع قائم وذلك لأن $a^2 = b^2$
e مقدار ثابت قدره $\sqrt{2}$

٤– قطع زائد طول محوره الحقيقي (6 وحدات) وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(1, 2\sqrt{5}), (1, -2\sqrt{5})$ جد معادلتي القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل والقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل.

$\because$ $(1,2\sqrt{5}), (1,-2\sqrt{5}) \in$ القطع المكافئ والنقطتان متناظرتان حول المحور السيني الموجب

$\therefore$ شكل المعادلة للقطع المكافئ هو $y^2 = 4px$

$\because$ $(1,2\sqrt{5}) \in$ للقطع $\therefore$ تحقق المعادلة القياسية $\quad (2\sqrt{5})^2 = 4P(1)$

$20 = 4P \Rightarrow P = 5 \Rightarrow F(5,0)$ بؤرة القطع المكافئ
$\therefore y^2 = 4(5)x$
$y^2 = 20x$ معادلة القطع المكافئ

$\because$ بؤرتي القطع الزائد هي بؤرة القطع المكافئ $\therefore$ بؤرتا القطع الزائد هما $F_2(-5,0), F_1(5,0)$

$\therefore c = 5 \Rightarrow c^2 = 25$
$\because 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$
$c^2 = a^2 + b^2$
$25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 9 \Rightarrow b^2 = 16$

$\because$البؤرتان $\in$ لمحور السينات $\therefore$ شكل المعادلة $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

٥– قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $(6\sqrt{2})$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمة كل من (h, k) التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

نجد بؤرتي القطع الزائد من معادلة القطع الناقص: $[9x^2 + 16y^2 = 576] \div 576$

$\frac{x^2}{\frac{576}{9}} + \frac{y^2}{\frac{576}{16}} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$\therefore a^2 = 64, b^2 = 36$
$c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow c^2 = 64 - 36 \Rightarrow c^2 = 28 \Rightarrow c = 2\sqrt{7}$

$\therefore$بؤرتي القطع الناقص والقطع الزائد هما $F_1(-2\sqrt{7}, 0)\ , F_2(2\sqrt{7}, 0)$

$\because 2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 18$
$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 28 = 18 + b^2 \Rightarrow b^2 = 28 - 18 \Longrightarrow b^2 = 10$

شكل المعادلة القياسي للقطع الزائد هي $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1$



$$\because hx^2 - ky^2 = 90] \div 90 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$$

$$\therefore \frac{90}{h} = 18 \Rightarrow 18h = 90 \Rightarrow h = \frac{90}{18} \Rightarrow h = 5$$

$$\therefore \frac{90}{k} = 10 \Rightarrow 10k = 90 \Rightarrow k = \frac{90}{10} \Rightarrow k = 9$$

٦- أكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل إذا علمت ان أحد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين $1,9$ وحدات على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الأحداثيين.

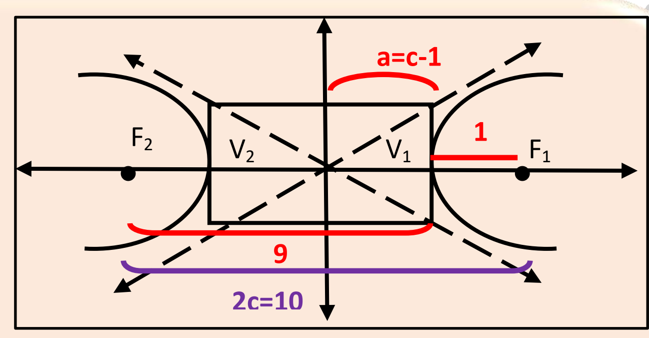
البعد بين البؤرتين $9 + 1 = 10$

$\therefore 2c = 10 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow c^2 = 25$

$a = 5 - 1 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a^2 = 16$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 16 + b^2$

$\therefore b^2 = 25 - 16 \Rightarrow b^2 = 9$



الأحتمال الأول : البؤرتان ∋ لمحور السينات

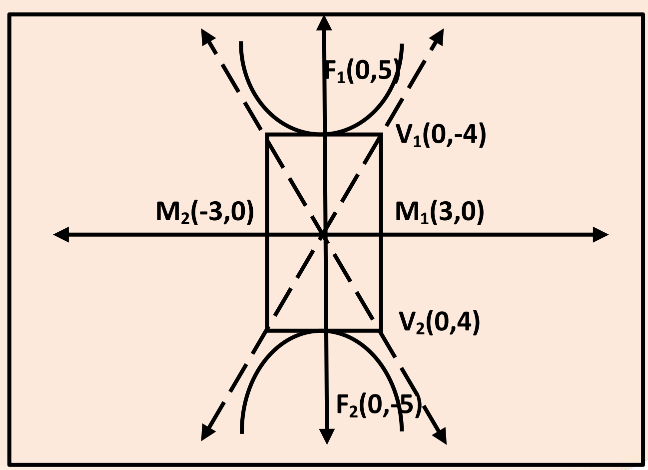
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

الاحتمال الثاني : البؤرتان ∋ لمحور الصادات

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$



٧- جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد الذي معادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ والنسبة بين طولي محوريه $= \frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الأصل

$\because$ بؤرتي القطع الناقص هما بؤرتا القطع الزائد $\therefore$ نجد بؤر الزائد من معادلته $x^2 - 3y^2 = 12] \div 12$

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{\frac{12}{3}} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$$\therefore a^2 = 12 \,,\ b^2 = 4 \Longrightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

بؤرتا القطع الناقص والزائد $F_1(4,0)\,, F_2(-4,0)$

$\because$ النسبة بين طولي محوريه $= \frac{5}{3} \Longleftarrow \frac{\text{طول المحور الأكبر}}{\text{طول المحور الأصغر}} = \frac{5}{3}$ وذلك لأن (المحور الكبير>المحور الصغير) في القطع الناقص.

$$\therefore \frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \Longrightarrow 3a = 5b \Rightarrow a = \frac{5}{3}b \Rightarrow a^2 = \frac{25}{9}b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

$$\therefore c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 16 = \frac{25}{9}b^2 - b^2 \Longrightarrow 16 = \frac{25b^2 - 9b^2}{9}$$

$$16 = \frac{16b^2}{9} \Rightarrow 16b^2 = 16 * 9 \Longrightarrow b^2 = \frac{16 * 9}{16} \Longrightarrow b^2 = 9$$

$a^2 = \frac{25}{9}(9) \Rightarrow a^2 = 25$ نعوض في (1) ينتج

∵ البؤرتين ∋ لمحور السينات ∴ شكل المعادلة القياسي للقطع الناقص هي $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

٨ - النقطة $P(6, L)$ تنتمي إلى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومعادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ جد كلاً من :

أ) قيمة L ب) طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة P

أ)

$x^2 - 3y^2 = 12] \div 12$

$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1 ....(1)$

∵ $P(6, L)$ ∋ للقطع ∴ تحقق المعادلة (1) $\frac{(6)^2}{12} - \frac{(L)^2}{4} = 1$

$\frac{36}{12} - \frac{L^2}{4} = 1 \Rightarrow 3 - \frac{L^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{L^2}{4} = 3 - 1 \Longrightarrow \frac{L^2}{4} = 2 \Rightarrow L^2 = 8 \Rightarrow L = \mp 2\sqrt{2}$

ب) طول نصف القطر البؤري المرسوم في الجهة اليمنى يعني ايجاد المسافه بين نقطة ($p(6, \mp 2\sqrt{2})$ تقع على القطع والبؤرة اليمنى

$\because \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$a^2 = 12, \; b^2 = 4$

$C^2 = a^2 + b^2$ لإيجاد البؤرة

$C^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

$F_1(4,0), F_2(-4,0)$

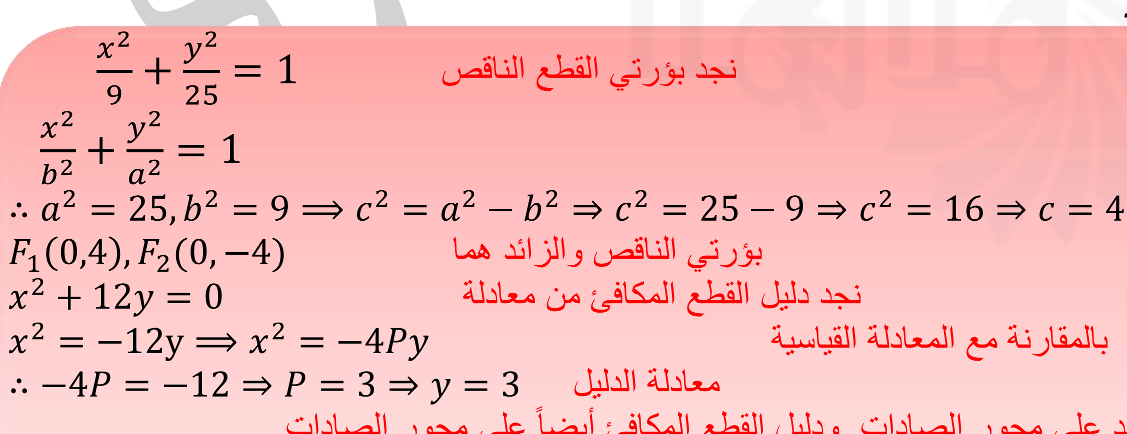
$PF_1 = \sqrt{(6-4)^2 + (\mp 2\sqrt{2} - 0)^2}$

$PF_1 = \sqrt{(2)^2 + (\mp 2\sqrt{2})^2}$

$PF_1 = \sqrt{4+8}$

$PF_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ وحدة طول

$P(6,2\sqrt{2})$ $V_2(-2\sqrt{3},0)$ $V_1(2\sqrt{3},0)$ $F_2(-4,0)$ $F_1(4,0)$ $P(6,-2\sqrt{2})$



٩ - جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2 + 12y = 0$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ نجد بؤرتي القطع الناقص

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$\therefore a^2 = 25, b^2 = 9 \Longrightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

$F_1(0,4), F_2(0,-4)$ بؤرتي الناقص والزائد هما

$x^2 + 12y = 0$ نجد دليل القطع المكافئ من معادلة

$x^2 = -12y \Longrightarrow x^2 = -4Py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\therefore -4P = -12 \Rightarrow P = 3 \Rightarrow y = 3$ معادلة الدليل

∵ بؤرتا القطع الزائد على محور الصادات ودليل القطع المكافئ أيضاً على محور الصادات

∴ $y = 3$ تمثل رأس القطع الزائد

$\therefore a = 3 \Rightarrow a^2 = 9 \quad , \quad c = 4 \Rightarrow c^2 = 16$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16 - 9 \Longrightarrow b^2 = 7$

∵البؤرتين والرأسين ∋ لمحور الصادات∴ شكل المعادلة القياسي للقطع الزائد $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$

أسئلة اثرائيــة

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $3x^2 + 5y^2 = 120$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي والبعد بين بؤرتيه $= \frac{1}{2}$

نستخرج من المعادلة القطع الناقص البؤرتين $3x^2 + 5y^2 = 120] \div 120$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $\frac{x^2}{\frac{120}{3}} + \frac{y^2}{\frac{120}{5}} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\therefore a^2 = 40, b^2 = 24$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 40 - 24 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4 \Longrightarrow F_1(4,0), F_2(-4,0)$

∵ النسبة بين طول المحور الحقيقي والبعد بين البؤرتين $= \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{2} \qquad \because c = 4 \Longrightarrow \frac{a}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a^2 = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16 = 4 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16 - 4 \Longrightarrow b^2 = 12$

∵ البؤرتين ∋ لمحور الصادات ∴ شكل المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

س / ليكن $5y^2 - 4x^2 = h$ قطعاً زائداً إحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $4y - 5x^2 = 0$ جد قيمة h

نستخرج بؤرة القطع المكافئ من المعادلة $4y - 5x^2 = 0$

$5x^2 = 4y] \div 5 \Longrightarrow x^2 = \frac{4}{5}y$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $x^2 = 4py$

بؤرة القطع المكافىء $4P = \frac{4}{5} \Rightarrow P = \frac{1}{5} \Rightarrow F\left(0, \frac{1}{5}\right)$

∴ بؤرتي القطع الزائد هما $F_1\left(0, -\frac{1}{5}\right) F_2\left(0, \frac{1}{5}\right)$

$\therefore c = \frac{1}{5} \Rightarrow c^2 = \frac{1}{25}$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $[5y^2 - 4x^2 = h] \div h \Longrightarrow \frac{y^2}{\frac{h}{5}} - \frac{x^2}{\frac{h}{4}} = 1 \Longrightarrow \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

$\therefore a^2 = \frac{h}{5}, b^2 = \frac{h}{4} \qquad \because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \frac{1}{25} = \frac{h}{5} + \frac{h}{4}$

$\frac{1}{25} = \frac{4h+5h}{20} \Rightarrow \frac{1}{25} = \frac{9h}{20} \Longrightarrow 225h = 20 \Rightarrow h = \frac{20}{225} \Longrightarrow h = \frac{4}{45}$

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ ونسبة البعد بين بؤرتيه وطول محوره المرافق $=\frac{5}{4}$

نجد بؤرتي القطع الناقص من المعادلة $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\therefore a^2=49, b^2=24 \Rightarrow c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=49-24 \Rightarrow c^2=25 \Rightarrow c=5$

بؤرتي القطع الناقص هما $F_1(5,0), F_2(-5,0)$

∵القطع الزائد يمر ببؤرتي القطع الناقص ∴ بؤرتي القطع الناقص تمثل رأسي القطع الزائد

قطع زائد $\therefore a=5 \Rightarrow a^2=25$

$\frac{2c}{2b}=\frac{5}{4}$

$\frac{c}{b}=\frac{5}{4} \Rightarrow 4c=5b$

$c=\frac{5}{4}b \Rightarrow c^2=\frac{25}{16}b^2 \Longrightarrow c^2=a^2+b^2$

$\frac{25}{16}b^2=25+b^2 \Longrightarrow \frac{25}{16}b^2-b^2=25$

$\Rightarrow \frac{25b^2-16b^2}{16}=25 \Rightarrow 9b^2=400$

$b^2=\frac{400}{9}$

$F_2(-5,0)$ $F_1(5,0)$

∵البؤرتين ∋ لمحور السينات ∴ شكل المعادلة $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{\frac{400}{9}}=1$

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي يمر بالنقطة $(\sqrt{3},0)$ ويقطع القطع المكافئ الذي معادلته $x^2-4\sqrt{3}y=0$ في النقطة التي احداثيها السيني =2

∵ $(\sqrt{3},0)$ ∋ للقطع الزائد ∴ تمثل احد رأسي القطع

$\therefore a=\sqrt{3} \Rightarrow a^2=3$

∵ القطع الزائد يقطع القطع المكافيء في النقطة التي احداثيها السيني = 2 ⇐ $(2)^2-4\sqrt{3}y=0$

نعوض قيمة x في معادلة القطع المكافئ $4=4\sqrt{3}y] \div 4\sqrt{3}$

$y=\frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ النقطة هي $\left(2,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ∋ للقطع الزائد ∴ تتحقق المعادلة $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{(2)^2}{3}-\frac{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2}{b^2}=1 \Longrightarrow \frac{4}{3}-\frac{\frac{1}{3}}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{3}-\frac{1}{3b^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{3}-1=\frac{1}{3b^2}$

$\Longrightarrow \frac{1}{3}=\frac{1}{3b^2} \Rightarrow 3b^2=3 \Rightarrow b^2=1 \Longrightarrow \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1 \Longrightarrow \frac{x^2}{3}-y^2=1$

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته على (x-axis) إذا كان البعد بين بؤرته ودليله يساوي طول المحور الحقيقي للقطع الزائد $x^2 - 4y^2 = 4$

من معادلة القطع الزائد نستخرج طول المحور الحقيقي $x^2 - 4y^2 = 4] \div 4$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالمقارنة مع $\therefore a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2a = 4$ طول المحور الحقيقي

$\therefore$ المسافة بين بؤرة ودليل القطع المكافئ =4 $2P = 2a \Longrightarrow 2p = 4 \Longrightarrow p = 2$

الحالة الأولى : شكل المعادلة القياسي (بالاتجاه الموجب لمحور السينات) $y^2 = 4px$

$y^2 = 4(2)x \Longrightarrow y^2 = 8x$

الحالة الثانية: شكل المعادلة القياسي (بالاتجاه السالب لمحور السينات) $y^2 = -4Px$

$y^2 = -4(2)x \Longrightarrow y^2 = -8x$

س/ عين النقاط على القطع الزائد $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$ والتي تبعد عن البؤرة في الفرع الأيمن للقطع بمقدار $\frac{1}{\sqrt{3}}$

المعادلة القياسية $\because \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\therefore a^2 = 3 ,\ b^2 = 1 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c^2 = 3 + 1 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = 2$

بؤرتي القطع الزائد هما $F_1(2,0), F_2(-2,0)$

نفرض النقطة $P(x,y) \in$ للقطع

بما أن بعد النقطة $P(x,y)$ عن البؤرة $F(2,0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

بتربيع الطرفين $\therefore \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$(x-2)^2 + y^2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = \frac{1}{3}$.................(1)

من معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$

$y^2 = \frac{x^2}{3} - 1$..................(2)

نعوض 2 في 1: $\left[x^2 - 4x + 4 + \frac{x^2}{3} - 1 = \frac{1}{3}\right] * 3$

$3x^2 - 12x + 12 + x^2 - 3 = 1 \Longrightarrow 4x^2 - 12x + 9 - 1 = 0$

$4x^2 - 12x + 8 = 0] \div 4$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Longrightarrow (x-2)(x-1) = 0$

أما $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ نعوض في 2

$y^2 = \frac{4}{3} - 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \mp\frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \left(2, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(2, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

او $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ نعوض في 2

$y^2 = \frac{1}{3} - 1 \Rightarrow y^2 = -\frac{2}{3}$ تهمل $\notin \mathbb{R}$

$\therefore$ النقاط هما: $\left\{\left(2, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(2, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

س/ أثبت ان النقطة $Q(-5,\frac{9}{4}) \in$ للقطع الزائد $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ ثم عين طولي نصفي القطرين البؤريين للقطع المرسومين من Q

ملاحظة : لإثبات النقطة $\in$ للقطع نعوضها في المعادلة فإذا الطرف الأيسر = الطرف الأيمن فأن النقطة $\in$ للقطع

$\therefore$ نعوض $Q\left(-5,\frac{9}{4}\right)$ في معادلة القطع

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

الطرف الأيسر $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=\frac{(-5)^2}{16}-\frac{\left(\frac{9}{4}\right)^2}{9} \Longrightarrow \frac{25}{16}-\frac{\frac{81}{16}}{9}$

$=\frac{25}{16}-\frac{81}{144} \Longrightarrow \frac{225-81}{144} \Longrightarrow \frac{144}{144}=1$ الطرف الايمن

$\therefore$ النقطة $Q\left(-5,\frac{9}{4}\right) \in$ للقطع الزائد

لإيجاد طولي نصفي القطرين البؤريين نحتاج استخراج بؤرة القطع الزائد من المعادلة $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

بالمقارنة بالمعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\therefore a^2=16\ ,\ \ b^2=9$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=16+9 \Rightarrow c^2=25 \Rightarrow c=5$

بؤرتي القطع الزائد هما $F_1(5,0)\ ,F_2(-5,0)$

طول نصف القطر البؤري: هي المسافة بين البؤرة والنقطة. ونستخرجها باستخدام قانون المسافة

طول نصف القطر البؤري الأول بين $F_1(5,0)$ والنقطة $Q(-5,\frac{9}{4})$

$$=\sqrt{(5-(-5))^2+\left(0-\frac{9}{4}\right)^2}=\sqrt{(10)^2+\left(-\frac{9}{4}\right)^2}=\sqrt{100+\frac{81}{16}}$$

$$=\sqrt{\frac{1600+81}{16}}+\sqrt{\frac{1681}{16}}=\frac{41}{4}$$

طول نصف القطر البؤري الثاني بين $F_2(-5,0)$ والنقطة $Q(-5,\frac{9}{4})$

$$=\sqrt{(-5-(-5))^2+\left(0-\frac{9}{4}\right)^2}=\sqrt{(-5+5)^2+\left(-\frac{9}{4}\right)^2}=\sqrt{0+\frac{81}{16}}=\frac{9}{4}unit$$

ملاحظة جدا مهمة : اذا ذكر في السؤال قطع زائد وقطع ناقص احدهما يمر ببؤرة الاخر اذن رأس الزائد هي بؤرة الناقص ورأس الناقص هي بؤرة الزائد

س/ التمارين العامة : (واجب)

قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وقطع زائد نقطة تقاطع محوريه نقطة الأصل كلا منهما يمر ببؤرة الاخر فاذا كانت $9x^2+25y^2=225$ معادلة قطع ناقص . جد معادلة القطع الزائد

ملزمة الأساس في الرياضيات

تغنيك عن المدرس الخصوصي لما فيـها من شرح وافي وملاحظات وافرة مع حلول جميع الأمثلة والتمارين واسئلة التمارين العامة مع حلول الأسئلة الوزارية والاثرائية لكل موضوع

اعداد وتصميم وتنضيد الست غيداء الشمري 2019

الجزء

1

الأساس في

الرياضيات

السادس العلمي الاحيائي

غيداء طارق الشمري

07901311457

2019



1 الاعداد المركبة

الحاجة الى توسيع مجموعه الاعداد الحقيقية
العمليات على مجموعه الاعداد المركبة
مرافق العدد المركب
الجذور التربيعية للعدد المركب
حل المعادلة التربيعية في $\mathbb{C}$
التمثيل الهندسي للعداد المركبة
الصيغة القطبية للعدد المركب
مــبرهنة ديـموآفــر

2 القطوع المخروطية

الـقطــع المكافــيء

الـقطــع الــنـاقــص

الـقطــع الـزائـــــد

3 التفاضل

المشتقات ذات الرتب العليا
المعدلات المرتبطة
مبرهنتا رول والقيمة المتوسطة
اختبار التزايد والتناقص للدالة بأستخدام المشتقة الأولى
النهاية العظمى والصغرى المحلية
تقعر وتحدب المنحنيات ونقط الانقلاب
اختبار المشتقة الثانية لنقط النهايات العظمى والصغرى المحلية
رسم المخطط البياني للدالة
تطبيقات عملية على القيم العظمى اوالصغرى

الفصل الثالث (التفاضل)

مراجـعة قـواعـد المشتقة

رموز المشتقة هي $\acute{y}\,,\ \grave{f}(x)\,,\ \frac{dy}{dx}$

القاعدة الأولى

لتكن $f(x) = c\ ,\quad c \in R$

$\Rightarrow \grave{f}(x) = 0$ اي ان مشتقة الثابت = صفر

ex

1) $f(x) = 5 \Rightarrow \grave{f}(x) = 0$
2) $f(x) = \sqrt{3} \Rightarrow \grave{f}(x) = 0$
3) $f(x) = -\frac{2}{3} \Rightarrow \grave{f}(x) = 0$

القاعدة الثانية

لتكن $f(x) = x^n \,.\, n \in R$

$\Longrightarrow \grave{f}(x) = n\,x^{n-1}$

ex

1) $f(x) = x^5 \Rightarrow \grave{f}(x) = 5x^4$
2) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \grave{f}(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$
3) $f(n) = \sqrt[3]{n} \Longrightarrow f(n) = n^{\frac{1}{3}}$ بتغيير صورة الجذر إلى دالة أسية $\left(\frac{\text{قوة الدالة}}{\text{دليل الجذر}}\right)$

$$\Longrightarrow \grave{f}(n) = \frac{1}{3}n^{-\frac{2}{3}}$$

$$\Longrightarrow \grave{f}(n) = \frac{1}{3n^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow \grave{f}(n) = \frac{1}{3\sqrt[3]{n^2}}$$

القاعدة الثالثة

اذا كانت $g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق و $c \in R$ بحيث ان : $f(x) = c\,g(x)$

$\Rightarrow \grave{f}(x) = c\grave{g}(x)$

ex

1) $f(x) = 4x^2 \Rightarrow \grave{f}(x) = 4(2x) = 8x$
2) $f(x) = -2\,x^{\frac{3}{5}} \Rightarrow \grave{f}(x) = -2(\frac{3}{5}\,x^{\frac{-2}{5}}) \Longrightarrow \frac{-6}{5\sqrt[5]{x^2}}$

القاعدة الرابعة

اذا كانت $h(x)\,,\ g(x)$ دوال قابلة للاشتقاق بحيث ان : $f(x) = h(x) \mp g(x)$

$\Rightarrow \grave{f}(x) = \grave{h}(x) \mp \grave{g}(x)$

ex

$f(x) = 3x^2 + 5x + 8$

$\Rightarrow \grave{f}(x) = 6x + 5$



القاعدة الخامسة اذا كانت $h(x)\,,\ g(x)$ دوال قابلة للاشتقاق بحيث ان $f(x) = h(x).g(x)$

$\Rightarrow \acute{f}(x) = h(x).\acute{g}(x) + g(x).\acute{h}(x)$

مشتقة حاصل ضرب الدالتين = الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الأولى

ex

$f(x) = (3 - 2x - x^5)(2x^7 + 5)$

$\acute{f}(x) = (3 - 2x - x^5)(14x^6) + (2x^7 + 5)(-2 - 5x^4)$

القاعدة السادسة اذا كانت $h(x), g(x)$ دوال قابلة للاشتقاق بحيث ان $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$

$\Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{g(x)\acute{h}(x) - h(x).\acute{g}(x)}{(g(x))^2}$

مشتقة حاصل قسمة دالتين = $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

ex

$f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2+5} \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{(x^2+5)(2x+3)-(x^2+3x+1)(2x)}{(x^2+5)^2}$

القاعدة السابعة اذا كانت $g(x)$ دالة قابلة للاشتقاق بحيث ان $f(x) = [g(x)]^n$

$\Rightarrow \acute{f}(x) = n[g(x)]^{n-1}.\acute{g}(x)$ (مشتقة داخل قوس)

ex

1- $f(x) = (x^2 + 3)^4$

$\Rightarrow \acute{f}(x) = 4(x^2 + 3)^3(2x)$ [يتوزع الثابت على المشتقة]

$= 8x(x^2 + 3)^3$

2- $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x^2 + 2}$

$f(x) = (x^3 + 3x^2 + 2)^{\frac{1}{2}}$ نحول صورة الجذر الى $\left(\frac{\text{قوة الدالة}}{\text{دليل الجذر}}\right)$

$\acute{f}(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 3x^2 + 2)^{-\frac{1}{2}}(3x^2 + 6x)$ توزيع $\frac{1}{2}$ على المشتقة

$= \left(\frac{3}{2}x^2 + 3x\right)\frac{1}{(x^3+3x^2+2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}x^2+3x}{\sqrt{x^3+3x^2+2}}$ لكي نحول القوة السالبة إلى موجبة نضع المقدار في المقام

أمثلة جد $\acute{f}(x)$ للدوال الآتية :

$f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^4$

$\acute{f}(x) = 4\left(\frac{x}{x+1}\right)^3 \frac{(x+1)(1)-(x)(1)}{(x+1)^2}$

$= 4\left(\frac{x}{x+1}\right)^3 \left[\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2}\right]$

$= \frac{4}{(x+1)^2}.\frac{x^3}{(x+1)^3} = \frac{4x^3}{(x+1)^5}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

ملاحظة

يمكن حل هذا السؤال بطريقتين : الأولى حسب قاعدة مشتقة حاصل قسمة دالتين والثانية بتغيير صورة الجذر إلى قوة كسرية $\left(\frac{\text{قوة الدالة}}{\text{دليل الجذر}}\right)$ ومن ثم رفعها إلى البسط وذلك لان البسط عدد ثابت و كما يلي

$f(x) = \frac{1}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$ عند الرفع تتغير اشارة الاس

$\therefore \acute{f}(x) = -\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{3}{2}}(2)$

$= -\frac{1}{(2x+1)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \acute{f}(x) = -\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$

مشتقات الدوال الدائرية

ملاحظة : مشتقة الدالة الدائرية هي مشتقة الدالة × مشتقة زاويتها

1) $\frac{d}{dx}(\sin y) = \cos y \frac{dy}{dx}$

2) $\frac{d}{dx}(\cos y) = -\sin y \frac{dy}{dx}$

3) $\frac{d}{dx}(\tan y) = \sec^2 y \frac{dy}{dx}$

4) $\frac{d}{dx}(\cot y) = -\csc^2 y \frac{dy}{dx}$

5) $\frac{d}{dx}(\sec y) = \sec y \tan y \frac{dy}{dx}$

6) $\frac{d}{dx}(\csc y) = -\csc y \cot y \frac{dy}{dx}$

أمثلة

1) $f(x) = \sin(7x^2 + 4x + 1)$

$\acute{f}(x) = \underbrace{\cos(7x^2+4x+1)}_{\text{مشتقة الدالة}}\underbrace{(14x+4)}_{\text{مشتقة الزاوية}} \Rightarrow (14x+4)\cos(7x^2+4x+1))$

2) $f(x) = \cos\sqrt[3]{x}$

$f(x) = \cos x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \acute{f}(x) = -\sin x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow \frac{-\sin\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}$

3) $y = \sec^3 5x$

نشتق حسب القاعدة السابعة

مشتقة القوة× مشتقة الدالة الدائرية×مشتقة الزاوية

$y = (\sec 5x)^3$

$\acute{y} = \underbrace{3(\sec 5x)^2}_{\text{مشتقة القوس}}\underbrace{(\sec 5x\tan 5x)}_{\text{مشتقة الدالة}}\underbrace{(5)}_{\text{مشتقة الزاوية}}$

$= 15\sec^2 5x \sec 5x \tan 5x = 15\sec^3 5x \tan 5x$

إذا كانت الدوال الدائرية متشابهة وزواياها متساوية

∴ عند الضرب تجمع الأسس.

4) $y = sin3x \cos 3\,x$

$\therefore y = \frac{1}{2}\sin 6x$

$\therefore \acute{y} = \frac{1}{2}\cos 6x\,(6) \Longrightarrow \acute{y} = 3\cos 6x$

$\because \sin 2\,x = 2\sin x \cos x$ قانون ضعف الزاوية

فيمكن تعويض $\sin 3x \cos 3x = \frac{1}{2}\sin 6x$

قـوانـين وقـواعـد مـهمـة

القواعد الذهبية

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

3) $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

قوانين ضعف الزاوية

1) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

3) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

4) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

5) $tan2x = \frac{2\,tanx}{1-\tan^2 x}$

بشرط المقام $\neq 0$

قوانين نصف الزاوية

1) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

2) $\cos^2 x = \frac{1+cos\,2x}{2}$

مثال جد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = \cos^4 x - \sin^4 x$

$y = (\cos^2 x + \sin^2 x)\,(\cos^2 x - \sin^2 x)$ تحليل فرق بين مربعين

حسب القاعدة الذهبية الأولى — قانون ضعف الزاوية لـ Cos

$y = (1)(\cos 2x) \Longrightarrow y = \cos 2x$

$\frac{dy}{dx} = -sin2x(2) = -2\sin 2x$

مثال أثبت ان $\frac{d}{dx}[\sin ax - \frac{1}{3}\sin^3 ax] = a\cos^3 ax$

الطرف الأيسر : $\frac{d}{dx}\left[\sin ax - \frac{1}{3}\sin^3 ax\right]$

$= \cos ax\,(a) - \frac{1}{3}[3\sin^2 ax\,(\cos ax)(a)]$

$= a\cos ax - a\sin^2 ax \cos ax$

$= a\cos ax\,[\,1 - \sin^2 ax]$ سحب $a\cos ax$ عامل مشترك

$= a\cos ax\,[\cos^2 ax]$ حسب القاعدة الذهبية الاولى

$= a\cos^3 ax =$ الطرف الايمن

$\therefore$ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

الأشتقاق الضمني

حين تكون y دالة معطاة في x أي ان $y = F(x)$ فيقال ان الدالة صريحة ويسمى x بالمتغير المستقل بينما y بالمتغير التابع، أما إذا كانت الدالة المعطاة تكون المتغيرات فيها ممزوجة حيث ان y, x في نفس الطرف ففي هذه الحالة يكون الاشتقاق ضمنياً بالنسبة إلى x أمثلة على ذلك :

$$y \Rightarrow \frac{dy}{dx} \quad , \quad 2y \Rightarrow 2\frac{dy}{dx} \quad , \quad y^3 \Rightarrow 3y^2\frac{dy}{dx}$$

مثال إذا كان $x^2 - y^2 = 7y - x$ جد $\frac{dy}{dx}$

نشتق x بالنسبة إلى نفسها حسب القواعد السبعة ونشتق y بالنسبة إلى x حسب القواعد وبإضافة $\frac{dy}{dx}$

$$\therefore 2x - 2y\frac{dy}{dx} = 7\frac{dy}{dx} - 1$$

نجمع القيم التي تحتوي على $\frac{dy}{dx}$ في الطرف الأيسر وباقي القيم في الطرف الأيمن.

$$-2y\frac{dy}{dx} - 7\frac{dy}{dx} = -1 - 2x$$

نستخرج $\frac{dy}{dx}$ عامل مشترك من الطرف الأيسر

$$\frac{dy}{dx}(-2y-7) = -1 - 2x$$

نقسم على معامل $\frac{dy}{dx}$ وهو $(-2y-7)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1-2x}{-2y-7}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(1+2x)}{-(2y+7)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+2x}{2y+7}$$

تـطبيـقات الـتفاضـل

لقد سبق ان تعلمت في الصف الخامس العلمي متى تكون الدالة قابلة للاشتقاق وتعرفت على قواعد إيجاد مشتقات الدوال الجبرية والدائرية والتفسير الهندسي والفيزيائي للمشتقة وفي هذا الفصل سنتناول بعض المفاهيم الأخرى وبعض استعمالات وتطبيقات حساب التفاضل.

المشتقات ذات الرتب العليا (Higher – Order Dedrivatives)

إذا كانت $y = f(x)$ دالة تتوافر فيها شروط الاشتقاق فإن مشتقتها الأولى (First Dericative) هي:

$\acute{y} = \frac{dy}{dx} = \acute{f}(x)$ وتمثل دالة جديدة

والدالة الجديدة إذا توافرت فيها شروط الاشتقاق أيضاً فإن مشتقتها دالة جديدة تمثل المشتقة الثانية (Second Derivative) ويرمز لها بالرمز $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ وهذه الأخيرة أيضاً دالة جديدة في المتغير x .

وإذا توافرت فيها شروط الاشتقاق فإن مشتقتها تسمى المشتقة الثالثة (*Third Derivative*) ويرمز لها

$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$ وعلى هذا المنوال يمكن ايجاد مشتقات متتالية وبدءا من المشتقة الثانية يطلق على

هذه المشتقات بالمشتقات العليا وتكتب المشتقة من الرتبة n كما يأتي $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$ حيث n عدد صحيح موجب. ولنتعرف على رموز مختلفة للمشتقات المتتالية وكما يأتي:

$f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x) \ldots\ldots\ldots, f^{(n)}(x)$

$y', y'', y''', y^{(4)} \ldots\ldots\ldots, y^{(n)}$

$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \ldots\ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$

ومن تعريف المشتقات العليا يتضح لنا أن $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ وإن $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

وكمثال للمشتقات المتتالية نأخذ الدالة الآتية $s = f(t)$ حيث s تمثل إزاحة جسم متحرك عند أي زمن t، فالمشتقة الأولى $\frac{ds}{dt} = f'(t)$ تمثل السرعة اللحظية لذلك الجسم، والمشتقة الثانية $\frac{d^2s}{dt^2} = f''(t)$ تمثل معدل تغير السرعة أي التعجيل (Acceleration) للجسم المتحرك.

أما المشتقة الثالثة للإزاحة بالنسبة للزمن t , $\frac{d^3s}{st^3} = f'''(t)$ فتمثل المعدل اللحظي لتغير التعجيل.

ومن الأمثلة الفيزيائية الأخرى، حساب درجة الأمان في نظام فرامل سيارة ما تتوقف على أقصى تباطؤ (*Deceleration*) يمكن ان تحدثه الفرامل (وهو تعجيل سالب).

وعند انطلاق صاروخ للفضاء فإن رائد الفضاء الذي في المركبة داخل الصاروخ يتعرض لتأثيرات صحية وهذه التأثيرات تعتمد على التعجيل الذي يتعرض له هذا الرائد.

وتستعمل المشتقة الثالثة لدراسة ما يتعرض له راكب قطارات الأنفاق.

مثال إذا كانت $y = cos2x$ جد $\frac{d^4y}{dx^4}$

نشتق y اربع مرات

$\frac{dy}{dx} = -\sin 2x\,(2) \Longrightarrow= -2sin2x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -2(\cos 2x(2)) \Longrightarrow -4\cos 2x$

$\frac{d^3y}{dx^3} = -4\left(-sin2x(2)\right) \Longrightarrow 8\sin 2x$

$\frac{d^4y}{dx^4} = 8(cos2x(2)) \Longrightarrow 16\cos 2x$

مثال إذا علمت بأن $y^2 + x^2 = 1$ فبرهن على ان $y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dy}{dx} = 0$

نشتق العلاقة $y^2 + x^2 = 1$ ضمنياً ثلاث مرات وذلك لأن أعلى مشتقة للدالة هي الثالثة.

$\because y^2 + x^2 = 1$

$\therefore \underbrace{2y}_{1}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{2} + 2x = 0$

الحد الأول من المشتقة الاولى نشتقه حسب قاعدة حاصل ضرب دالتين $2y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(2\frac{dy}{dx}\right) + 2 = 0$

$$\left[\,2y\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2=0\,\right]\div 2$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0$$ الحد الاول مشتقة حاصل ضرب دالتين والحد الثاني حسب القاعدة السابعه

1 2

ملاحظة : $\frac{d^2y}{dx^2}$ معناها المشتقة الثانية

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ معناها (المشتقة الأولى) ^{2}

$$y\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$y\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$ جمع معاملات الحد الثاني مع معاملات الحد الثالث

تمارين [3 − 1]

١ − جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي

a) $y=\sqrt{2-x}\ ,\ \forall x<2$

نغير صورة الجذر إلى قوة كسرية ومن ثم نشتق حسب القاعدة السابعة.

$$y=(2-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)\Longrightarrow=-\frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{4}(2-x)^{-\frac{3}{2}}(-1)\Longrightarrow-\frac{1}{4\sqrt{(2-x)^3}}$$

b) $y=\frac{2-x}{2+x}\ ,x\neq-2$

حسب قاعدة قسمة دالتين

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2+x)(-1)-(2-x)(1)}{(2+x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2-x-2+x}{(2+x)^2}\Longrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-4}{(2+x)^2}$$

نرفع المقام إلى البسط ونغير إشارة القوة وذلك لأن البسط عدد ثابت وثم نشتق وفق القاعدة السابعة

$$\frac{dy}{dx}=-4(2+x)^{-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-4[-2(2+x)^{-3}(1)]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{8}{(2+x)^3}$$

c) $2xy-4y+5=0$

نشتق اشتقاق ضمني لأن الدالة ليست صريحة الحد الاول حسب مشتقة ضرب دالتين

$$2x\frac{dy}{dx}+y\,(2)-4\frac{dy}{dx}+0=0]\ \div 2$$

$$x\frac{dy}{dx}+y-2\frac{dy}{dx}=0$$

$$(x-2)\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{(x-2)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x-2)\left(-\frac{dy}{dx}\right)-(-y)(1)}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)\left[-\left(\frac{-y}{(x-2)}\right)\right]+y}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)\left(\frac{y}{(x-2)}\right)+y}{(x-2)^2}=\frac{2y}{(x-2)^2}$$

٢ – جد $f'''(1)$ لكل مما يأتي

a) $f(x) = 4\sqrt{6-2x} \qquad \forall x < 3$

مطلب السؤال هو إيجاد المشتقة الثالثة عند $x = 1$ ∴ نشتق ثلاث مرات ثم نعوض بدل x بـ (1) بعد التبسيط

$f(x) = 4(6-2x)^{\frac{1}{2}}$

$\grave{f}(x) = 2(6-2x)^{-\frac{1}{2}}(-2) \Rightarrow -4\,(6-2x)^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = 2(6-2x)^{-\frac{3}{2}}(-2) \Rightarrow -4(6-2x)^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(x) = 6(6-2x)^{-\frac{5}{2}}(-2) \Rightarrow= -12(6-2x)^{-\frac{5}{2}}$

$f'''(x) = \frac{-12}{\sqrt{(6-2x)^5}}$

$f'''(1) = \frac{-12}{\sqrt{(6-2(1))^5}} = \frac{-12}{(\sqrt{4})^5} = -\frac{12}{32} = \frac{-3}{8}$

b) $f(x) = \sin \pi x$

$f'(x) = \cos \pi\, x(\pi) = \pi \cos \pi\, x$

$f''(x) = \pi(-\sin \pi x(\pi)) = -\pi^2 \sin \pi\, x$

$f'''(x) = -\pi^2(\cos \pi x(\pi)) = -\pi^3 \cos \pi x$

$f'''(1) = -\pi^3 \cos \pi(1) = -\pi^3(-1) = \pi^3 \qquad [\cos \pi = -1]$

c) $f(x) = \frac{3}{2-x} \qquad x \neq 2$

بما ان البسط عدد ثابت∴ نرفع المقام إلى البسط مع تغيير إشارة القوة ويمكن حل السؤال حسب قاعدة قسمة دالتين.

$f(x) = 3\,(2-x)^{-1}$

$f'(x) = -3(2-x)^{-2}(-1) = 3(2-x)^{-2}$

$f''(x) = -6(2-x)^{-3}(-1) = 6(2-x)^{-3}$

$f'''(x) = -18(2-x)^{-4}(-1) = 18(2-x)^{-4}$

$f'''(x) = \frac{18}{(2-x)^4}$

$f'''(1) = \frac{18}{(2-1)^4} = \frac{18}{1} = 18$

٣ – إذا كانت $y = \tan x$ فبرهن ان $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1+y^2)$ حيث ان $x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, \forall n \in Z$

نشتق العلاقة $y = \tan x$ مرتان حتى نصل إلى الدالة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1+y^2)$

$y = \tan x$

$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\sec x\,(\sec x \tan x)(1)$ مشتقة القوة في مشتقة الدالة الدائرية في مشتقة الزاوية

$= 2\sec^2 x \tan x$

$\because \sec^2 x = \tan^2 x + 1 \qquad (2)$ العلاقة الذهبية

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 2\,(\tan^2 x + 1)\tan x$



$= 2\tan x\,(\tan^2 x + 1) \dots\dots (1)$

$\because y = \tan x$ من السؤال

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(y^2 + 1)$ نعوض في (1)

٤ – إذا كانت $y = x\sin x$ فبرهن أن $y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$

نشتق العلاقة $y = x\sin x$ اربع مرات حتى نصل إلى الدالة التفاضلية

$y = x\sin x$ مشتقة حاصل ضرب دالتين

$\frac{dy}{dx} = x\cos x + \sin x\,(1) = x\cos x + \sin x$

$\frac{d^2x}{dx^2} = x(-\sin x) + \cos x(1) + \cos x$

$= -x\sin x + \cos x + \cos x = -x\sin x + 2\cos x$

الحد الاول (مشتقة حاصل ضرب دالتين)

$\frac{d^3y}{dx^3} = -x\cos x + \sin x\,(-1) + 2(-\sin x)$

$= -x\cos x - \sin x - 2\sin x = -x\cos x - 3\sin x$

$\frac{d^4y}{dx^4} = -x(-\sin x) + \cos x(-1) - 3\cos x$

$= x\sin x - \cos x - 3\cos x = x\sin x - 4\cos x \dots\dots (1)$

$\because y = x\sin x$ نعوض في (1)

$\therefore y^{(4)} = y - 4\cos x$

$y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$

سؤال إثرائي إذا كانت $y = \frac{2-\cos x}{2+\cos x}$ فبرهن أن $\frac{dy}{dx} = \frac{4\sin x}{(2+\cos x)^2}$

$y = \frac{2-\cos x}{2+\cos x}$ مشتقة حاصل قسمة دالتين

$\frac{dy}{dx} = \frac{(2+\cos x)[-(-\sin x)]-(2-\cos x)(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin x+\sin x\cos x+2\sin x-\sin x\cos x}{(2+\cos x)^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sin x}{(2+\cos x)^2}$

المعدلات المرتبطة Related Rates

إذا وجد أكثر من متغير بحيث تتوقف قيمة كل من هذه المتغيرات على متغير واحد يسمى (بارامتر) ومثاله الزمن فتتغير كل المتغيرات تبعاً لتغيره وحيث ان العلاقة هي ارتباط فإننا نسمي المعدلات الزمنية هذه بالمعدلات الزمنية المرتبطة وأحياناً بالمعدلات المرتبطة أو المعدلات الزمنية فقط فمثلاً إذا كان.

$$y = g(t), x = f(t)$$

فالمتغيران x, y متغيرين تابعين كل منهما مرتبط بالمتغير المستقل t فمن الممكن ربط المتغيرين ببعضهما، ويمكن ان نجد معدل تغيير كل منهما وكما يأتي $\frac{dx}{dt} = f'(t) , \frac{dy}{dt} = g'(t)$ والناتجان يمثلان المعدلين الزمنيين لتغيير كل من y, x.وقد يتوافر الربط بين المتغيرين في مسألة ما بمعادلة وفي هذه الحالة نشتق الطرفين بالنسبة للزمن t فعلى سبيل المثال من المعادلة $x^2 + y^2 - 4y + 6x = 0$ يمكن إيجاد المعدل الزمني لتغيير كل من x, y وكما يلي:

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 - 4y + 6x) = \frac{d}{dt}(0)$$

$$\Longrightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - 4\frac{dy}{dt} + 6\frac{dx}{dt} = 0$$

فيكون المعدل الزمني لتغيير y يساوي $\frac{dy}{dt}$ والمعدل الزمني لتغير x يساوي $\frac{dx}{dt}$

لحل أي سؤال يتعلق بالمعادلات المرتبطة حاول إتباع ما يلي إن أمكن

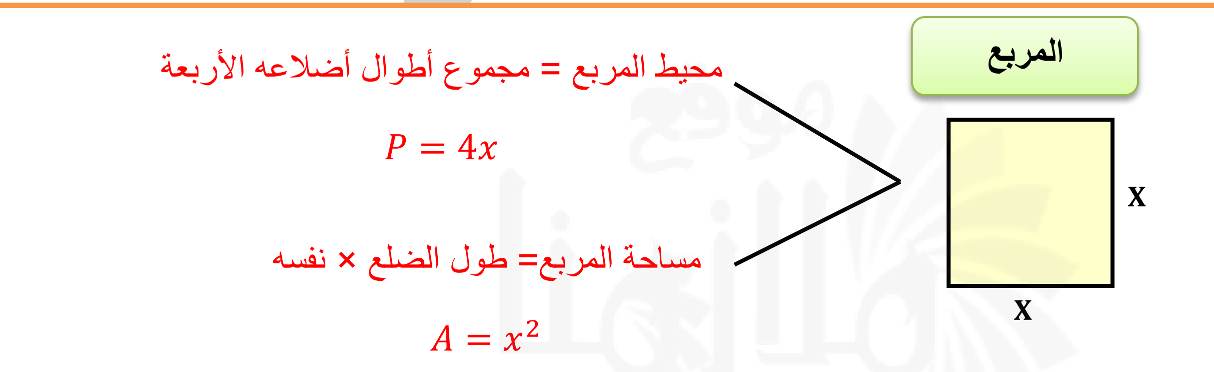
١- ارسم مخططاً للمسألة (أن احتجت إلى ذلك) وحدد المتغيرات والثوابت وضع لها الرموز وحدد العلاقة الرئيسية في حل السؤال.

٢- حاول ايجاد علاقة أخرى بين المتغيرات لكي تقلل من عدد المتغيرات.

٣- نشتق الطرفين بالنسبة للمتغير (الزمن) t.

٤- عوض معطيات السؤال من المتغيرات بعد الاشتقاق.

قوانين الأشكال الهندسية الغير مجسمة [ثنائية الأبعاد]

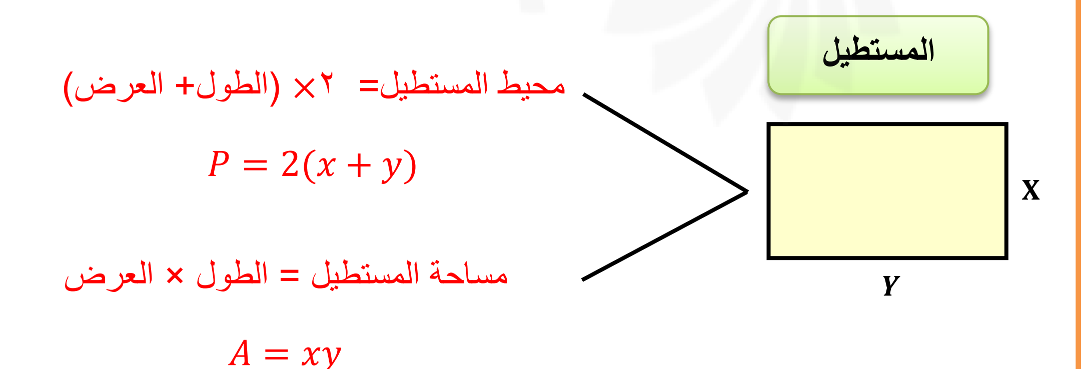


محيط المربع = مجموع أطوال أضلاعه الأربعة

$P = 4x$

مساحة المربع= طول الضلع × نفسه

$A = x^2$



محيط المستطيل= ٢× (الطول+ العرض)

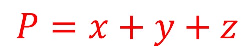
$P = 2(x + y)$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$A = xy$

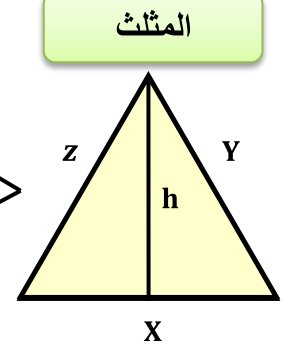
المثلث


محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه الثلاث


$$P = x + y + z$$

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

$$A = \frac{1}{2}\, x\, h$$



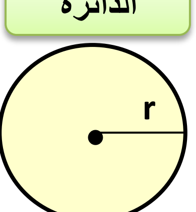


محيط الدائرة = القطر × النسبة الثابتة

$$P = 2r\,\pi$$

مساحة الدائرة = (نصف القطر)٢ × النسبة الثابتة

$$A = r^2\,\pi$$



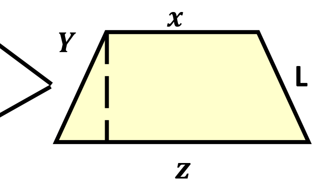
شبه المنحرف

محيط شبه المنحرف = مجموع أطوال أضلعه الأربعة

$$P = X + Y + Z + L$$

مساحة شبه المنحرف= نصف مجموع ضلعيه المتوازيين × الارتفاع المحصور بينهما

$$A = \frac{1}{2}(X + Z)h$$



قوانين الاشكال الهندسية المجسمه (ثلاثية الابعاد)

المكعب

المساحة الجانبية = محيط القاعدة× الارتفاع

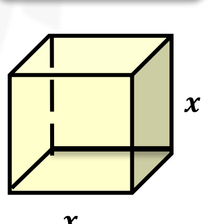
$$L.A = 4x^2$$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

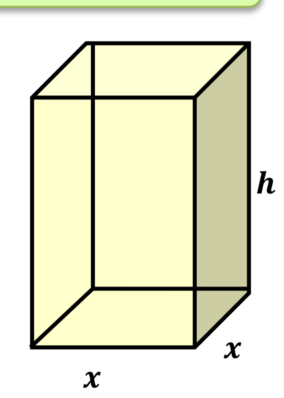
$$T.A = 4x^2 + 2x^2 = 6x^2$$

الحجم= مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = x^2.x = x^3$$



متوازي السطوح المستطيلة (قاعدته مربعة)



المساحة الجانبية = محيط القاعدة× الارتفاع

$$L.A = 4xh$$

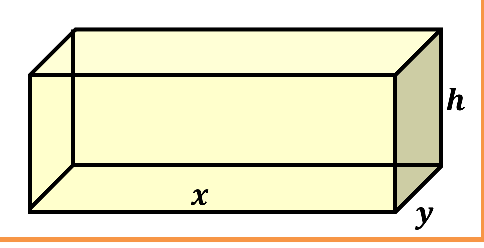
المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

$$T.A = 4xh + 2x^2$$

الحجم= مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = x^2h$$

متوازي السطوح المستطيلة (قاعدته مستطيل)



المساحة الجانبية = محيط القاعدة× الارتفاع

$$L.A = 2(x + y)h = 2h(x + y)$$

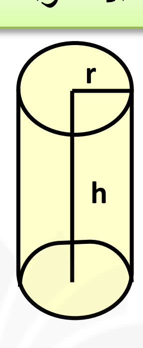
المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

$$T.A = 2h(x + y) + 2(xy)$$

الحجم= مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = xyh$$

الاسطوانة



المساحة الجانبية= محيط القاعدة× الارتفاع

$$L.A = 2\pi r\, h$$

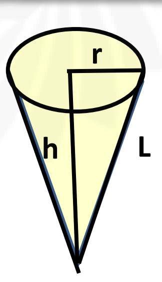
المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

$$T.A = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

الحجم= مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = \pi r^2h$$

المخروط



المساحة الجانبية = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة× طول المولد

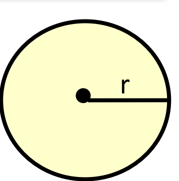
$$L.A = \frac{1}{2}(2\pi r)L = \pi rL$$

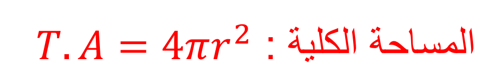
المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$T.A = \pi rL + \pi r^2$$

الحجم= $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = \frac{1}{3}(\pi r^2)h = \frac{\pi}{3}r^2h$$





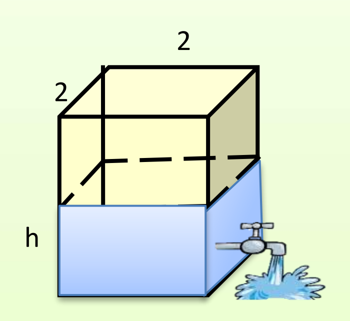
المساحة الكلية : $T.A = 4\pi r^2$

مثال

خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة طول ضلعها (2m) يتسرب منه الماء بمعدل $(0.4m^3/h)$ جد معدل تغيير انخفاض الماء في الخزان عند أي زمن t.

ليكن حجم الماء في الخزان عند أي زمن t هو v(t) .

يتسرب الماء $\Leftarrow \frac{dv}{dt} = -0.4$ (الإشارة السالبة تعني النقصان)



ليكن ارتفاع الماء في الخزان عند أي زمن هو h

المطلوب إيجاد $\frac{dh}{dt}$

ملاحظة: الماء يأخذ شكل الخزان (متوازي سطوح مستطيلة)

∴ الحجم= مساحة القاعدة × الارتفاع

= (طول الضلع)٢ × الارتفاع (لان القاعدة مربعه)

$\therefore V = (2)^2 h \Rightarrow v = 4h$

$\frac{dv}{dt} = 4\frac{dh}{dt}$ نشتق بالنسبة للزمن t

$-0.4 = 4\frac{dh}{dt}$

$\therefore \frac{dh}{dt} = \frac{-0.4}{4} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -0.1\ m/h$ معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان

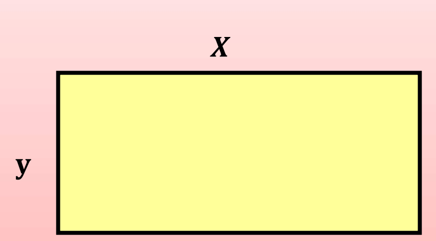
∴ معدل انخفاض الماء في الخزان $0.1\ m/h$.

مثال

صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها تساوي $(96\ cm^2)$ يتمدد طولها بمعدل $(2\ cm/s)$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة، جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها (8cm) .

نفرض طول المستطيل في أي لحظة $x =$

نفرض عرض المستطيل في أي لحظة $y =$



معدل تغير الطول $\frac{dx}{dt} = 2cm/s$

المطلوب إيجاد $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ معدل تغير العرض.

مساحة المستطيل = الطول× العرض

$A = xy$

$96 = xy$..........(1)

$\Rightarrow y = 8cm$ نعوض في (1)

$96 = 8x \Rightarrow x = \frac{96}{8} \Rightarrow x = 12\ cm$

نشتق العلاقة (١) بالنسبة للزمن حسب قاعدة ضرب دالتين

$0 = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$ ....(2)

نعوض قيم $\frac{dx}{dt}, y, x$ في العلاقة (2)

$0 = 12\frac{dy}{dt} + (8)(2)$

$0 = 12\frac{dy}{dt} + 16 \Rightarrow 12\frac{dy}{dt} = -16$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-16}{12} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-4}{3}\ cm/s$

∴ معدل تناقص العرض هو $\frac{4}{3}\ cm$

ملاحظات : في المعدلات المرتبطة بالزمن نلاحظ ما يلي:

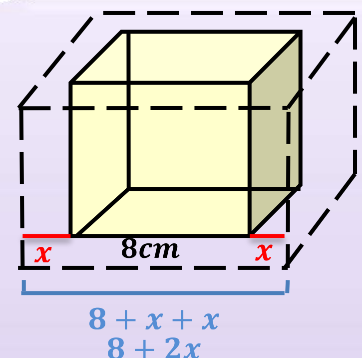
١- إذا كان معدل التغير $cm^3/s\ , m^3/\ h$ فهذا يعني تغير الحجم.

٢- إذا كان معدل التغير $cm^2/s, m^2/h$ فهذا يعني تغير المساحة.

٣- إذا كان المقدار في السؤال ثابت (مقدار الحجم أو المساحة أو المحيط) وهذا يعني انه لا يتغير بين لحظة وأخرى فعند الاشتقاق بالنسبة للزمن يكون مساوياً للصفر.

مثال

مكعب صلد طول حرفه $(8cm)$ مغطى بطبقة من الجليد بحيث شكله يبقى مكعباً، فإذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $(6cm^3/s)$ جد معدل النقصان بسمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها هذا السمك $(1cm)$



نفرض سمك الجليد في أي لحظة $= x$

حجم الجليد في أي لحظة $= v$

المطلوب معدل تغير سمك الجليد $= \frac{dx}{dt}$ عندما $x = 1$

حجم الجليد = حجم المكعب المغطى بالجليد – حجم المكعب الأصلي

$=$ (طول الضلع)^3 – (طول الضلع الاصلي)^3

نشتق العلاقة بالنسبة للزمن

$V = (8 + 2x)^3 - (8)^3$

$\frac{dv}{dt} = 3(8 + 2x)^2 \left(2\frac{dx}{dt}\right) - 0$

$\frac{dv}{dt} = 6(8 + 2x)^2\ \frac{dx}{dt}$ ....(1)

ملاحظة : عندما يقال في السؤال في اللحظة التي يكون سمك الجليد $(1cm)$ هذا يعني ان التعويض بسمك الجليد بعد الاشتقاق

نعوض $\frac{dv}{dt} = -6\ cm^3/s$ [الإشارة السالبة دلالة لذوبان الجليد] و $x = 1$ في العلاقة 1

$-6 = 6\big(8 + 2(1)\big)^2\frac{dx}{dt} \Longrightarrow -6 = 6(10)^2\ \frac{dx}{dt} \Rightarrow -6 = 600\frac{dx}{dt}$

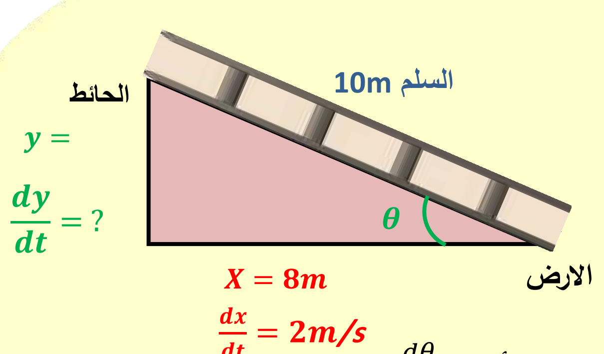
$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{-6}{600} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -0.01\ cm/s$ معدل تغير سمك الجليد

∴ معدل النقصان في سمك الجليد هو $0.01\ cm\ /s$



مثال سلم طوله (10m) يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسي فإذا أنزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل $(2m/s)$ عندما يكون الطرف الأسفل على بعد $(8m)$ عن الحائط جد:

١) معدل انزلاق الطرف العلوي. ٢) سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض.



نفرض بعد السلم عن الحائط في أي لحظة هو x

اذن معدل تغير بعد السلم عن الحائط هو $\frac{dx}{dt} = 2m$

نفرض بعد السلم عن الارض في اي لحظة هو y

نفرض قياس الزاوية بين السلم والأرض= θ

المطلوب : إيجاد معدل انزلاق الطرف العلوي

عن الأرض في أي لحظة $\frac{dy}{dt}$ وإيجاد سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض $\frac{d\theta}{dt}$

* نطبق مبرهنة فيثاغورس وذلك لتقليل المجاهيل

1) $x^2 + y^2 = 100 \quad \ldots\ldots(1)$

$(8)^2 + y^2 = 100 \Rightarrow y = 100 - 64 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = 6m$

$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0\ ] \div 2$ نشتق العلاقة (1) بالنسبة للزمن

$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$

$(8)(2) + (6)\frac{dy}{dt} = 0$

$16 + 6\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 6\frac{dy}{dt} = -16 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-16}{6}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-8}{3}\ m/s$ معدل تغير بعد السلم عن الارض

∴ معدل تغير انزلاق السلم عن الأرض $\frac{8}{3}\ m/s$

2) $\sin\theta = \frac{y}{10}$

$\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\ \frac{dy}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$ نشتق بالنسبة للزمن

$\because \left[\cos\theta = \frac{8}{10}\ ,\ \frac{dy}{dt} = \frac{-8}{3}\right]$ نعوض في(2)

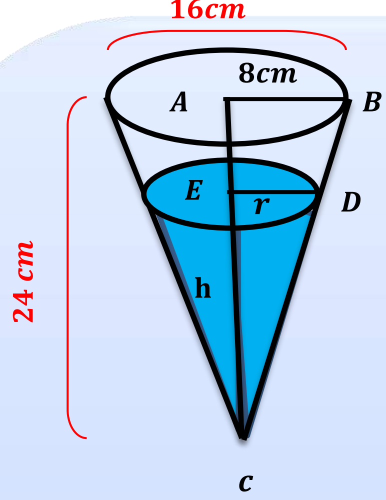
$\therefore \frac{8}{10}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\left(\frac{-8}{3}\right)$

$\frac{8}{10}\frac{d\theta}{dt} = \frac{-8}{30} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{-8}{30}.\frac{10}{8}$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{3}\quad rad/s$ سرعة تغير الزاوية

مثال

مرشح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه للأسفل وارتفاعه يساوي $(24cm)$ وطول قطر قاعدته $(16cm)$ يصب فيه سائل بمعدل $(5cm^3/s)$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $1cm^3/s$ جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل $(12cm)$



نفرض بعدي المخروط المائي: نصف القطر $= r$ والارتفاع $= h$

نفرض حجم السائل في أي لحظة $v(t)$

ملاحظة : في الشكل المخروطي نستعمل أما $\tan\theta$ أو تشابه المثلثين وذلك لتقليل عدد المتغيرات.

العلاقة : من تشابه المثلثين $\Delta DEC, \Delta ABC$

$$\frac{ED}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

$$\frac{r}{8} = \frac{h}{24} \Rightarrow 24r = 8h \Rightarrow r = \frac{8}{24}h \Rightarrow r = \frac{1}{3}h \ldots\ldots\ldots(1)$$

الدالة :

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h \ldots\ldots\ldots(2)$$

نعوض (1) في (2)

$$v = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{3}h\right)^2 h$$

$$v = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h^2}{9}\right)h \Rightarrow v = \frac{\pi}{27}h^3$$

نشتق بالنسبة للزمن

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{27}\left(3h^2\frac{dh}{dt}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{9}h^2\frac{dh}{dt}$$

معدل تغير حجم السائل = معدل الصب – معدل التسرب $\Leftarrow$ $\frac{dv}{dt} = 5 - 1 = 4cm^3/s$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = 4\ cm^3/s$$

$$4 = \frac{\pi}{9}(12)^2\frac{dh}{dt}$$

$$4 = \frac{144\pi}{9}\frac{dh}{dt}$$

$$4 = 16\pi\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{4}{16\pi}$$

$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\pi}cm/s$ معدل تغير عمق السائل في المخروط

مثال لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $y^2 = 4x$ بحيث يكون معدل أبتعادها عن النقطة $(7,0)$ يساوي $(0.2\ unit/s)$ جد المعدل الزمني لتغير الإحداثي السيني للنقطة M عندما يكون $x = 4$

لتكن $M\ (x,y)$ ولتكن $N(7,0)$ ولتكن المسافة MN تساوي S

$\therefore S = \sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow s = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2}$ ……………(1)

$\because y^2 = 4x$ نعوض في (١)

$\Rightarrow S = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 4x} \Rightarrow S = \sqrt{x^2 - 10x + 49} \Longrightarrow S = (x^2 - 10x + 49)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}(x^2 - 10x + 49)^{\frac{-1}{2}}\left(2x\frac{dx}{dt} - 10\frac{dx}{dt}\right)$ نشتق بالنسبة للزمن

$\frac{ds}{dt} = \frac{2\frac{dx}{dt}(x-5)}{2\sqrt{x^2-10x+49}}$

نعوض $\frac{ds}{dt} = 0.2\ unit\ /s$, $x = 4$

$\therefore 0.2 = \frac{(4-5)\frac{dx}{dt}}{\sqrt{(4)^2-10(4)+49}}$

$\frac{2}{10} = \frac{-1}{\sqrt{25}}\ \frac{dx}{dt}$

$\frac{1}{5} = \frac{-1}{5}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{-1}{5}} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -1\ unit\ /s$ معدل تغير الاحداثي السيني

تمارين (2 – 3)

١) سلم يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسي فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل $(2m/s)$ جد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض تساوي $\frac{\pi}{3}$

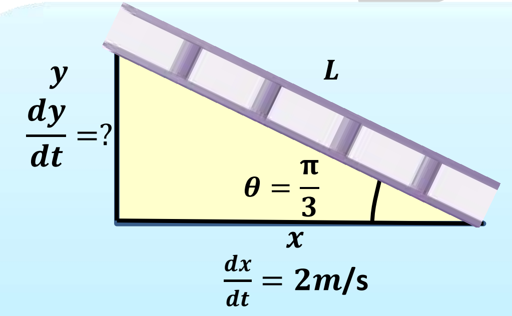
نفرض بعد الطرف الأسفل عن الحائط في أي لحظة $= x$

∴ معدل تغير بعد الطرف الأسفل عن الحائط $\frac{dx}{dt}$

نفرض بعد الطرف العلوي عن الأرض في أي لحظة $= y$

∴ معدل تغير بعد الطرف العلوي عن الأرض $\frac{dy}{dt}$

نفرض طول السلم $= L$ (ثابت بدون معدل تغير)



العلاقة : $\therefore \tan\theta = \frac{y}{x}$

$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{y}{x} \Longrightarrow \sqrt{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \sqrt{3}x$............(1)

ملاحظة : لتقليل عدد المجاهيل نستخدم دالة $\tan\theta$ وذلك لأن θ معلومة والمجاهيل هي الضلع المقابل للزاوية والمجاور لها

الدالة : من قانون فيثاغورس

$x^2 + y^2 = L^2$ نشتق بالنسبة للزمن

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0..........(2)$$ مشتقة $L=0$ وذلك لأنه ثابت

$$2x\frac{dx}{dt}+2(\sqrt{3}x)\frac{dy}{dt}=0]\ \div 2$$ نعوض (1) في (2)

$$x\frac{dx}{dt}+\sqrt{3}x\frac{dy}{dt}=0$$

$$x(2)+\sqrt{3}x\frac{dy}{dt}=0$$ نعوض $\frac{dx}{dt}=2$

$$x\left(2+\sqrt{3}\frac{dy}{dt}\right)=0$$

أما $x=0$ يهمل [لايوجد بعد قيمته تساوي 0]

أو $2+\sqrt{3}\ \frac{dy}{dt}=0$

$$\sqrt{3}\ \frac{dy}{dt}=-2 \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{-2}{\sqrt{3}}\ \ m/s$$ معدل تغير البعد العلوي عن الأرض

معدل انزلاق الطرف العلوي $\frac{2}{\sqrt{3}}\ m/s$

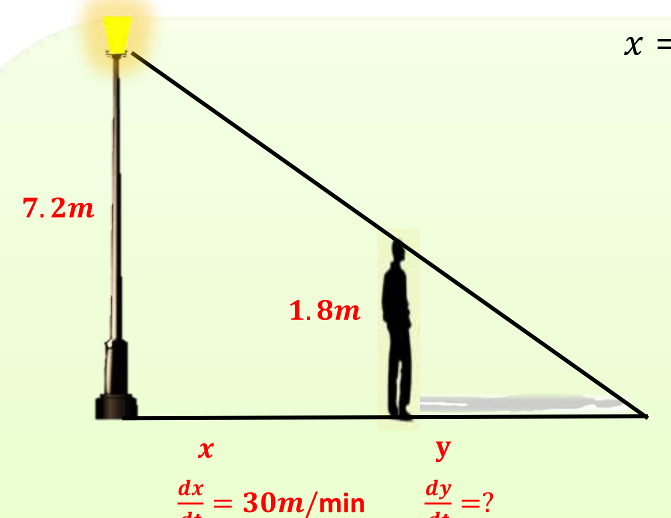
٢) عمود طوله(7.2m) في نهايته مصباح، يتحرك رجل طوله (1.8m) مبتعداً عن العمود وبسرعة $(30m/min)$ جد معدل تغير طول ظل الرجل.

نفرض بعد الرجل عن العمود في أي لحظة $= x$

معدل تغير بعد الرجل عن العمود $\frac{dx}{dt}$

نفرض طول ظل الرجل في أي لحظة $= y$

معدل تغير طول ظل الرجل $\frac{dy}{dt}$



$\frac{dx}{dt}=30m/min$ $\frac{dy}{dt}=?$

العلاقة : من تشابه المثلثين

$$\frac{1.8}{7.2}=\frac{y}{y+x}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{y}{y+x} \Rightarrow 4y=y+x \Rightarrow x=4y-y \Rightarrow x=3y\ ....(1)$$

نشتق العلاقة (1) بالنسبة للزمن

$$\frac{dx}{dt}=3\frac{dy}{dt}$$

$$\because \frac{dx}{dt}=30$$

$$\therefore 30=3\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{30}{3} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=10\ \ m/min$$

معدل تغير طول ظل الرجل

٣) لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y = x^2$ جد أحداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $\left(0\,,\frac{3}{2}\right)$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الأحداثي الصادي للنقطة M.

نفرض $M(x,y)$ نقطة $\in$ للقطع المكافئ

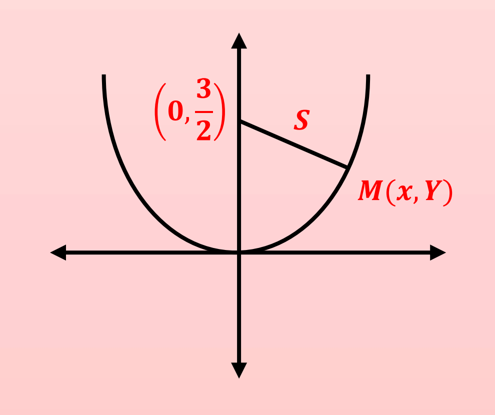
نفرض المسافة بين النقطتين في أي لحظة $= s$

المعدل الزمني لتغير المسافة بين النقطتين $= \frac{ds}{dt}$

نجد العلاقة بين النقطتين من قانون المسافة

$$s = \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2}$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}} \ldots\ldots\ldots (1)$$



العلاقة من السؤال

$$\because y = x^2 \ldots\ldots\ldots (2)$$

نعوض 2 في 1

$$s = \sqrt{y + y^2 - 3y + \frac{9}{4}}$$

$$s = \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$$

نشتق بالنسبة للزمن

$$s = \left(y^2 - 2y + \frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\left(y^2 - 2y + \frac{9}{4}\right)^{\frac{-1}{2}}\left(2y\frac{dy}{dt} - 2\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2\left(y\frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dt}\right)}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(y-1)}{\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\ \frac{dy}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

نعوض في (3)

$$\because \frac{ds}{dt} = \frac{2}{3}\ \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{2}{3}\ \frac{dy}{dt} = \frac{(y-1)}{\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\ \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{y-1}{\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}$$

بتربيع الطرفين

$$2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}} = 3y - 3$$

$$4\left(y^2 - 2y + \frac{9}{4}\right) = 9y^2 - 18y + 9 \Rightarrow 4y^2 - 8y + 9 - 9y^2 + 18y - 9 = 0$$

$$10y - 5y^2 = 0\ ]\ \div 5$$

$$2y - y^2 = 0 \Rightarrow y(2-y) = 0$$

أما $y = 0$ يهمل — لان المعدل الزمني لابتعاد النقطة = ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي

أو $2 - y = 0 \Rightarrow y = 2$ — نعوض في (2)

$$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{2}$$

$$M_1(\sqrt{2},2)\ ,\ M_2(-\sqrt{2},2)$$

٤) جد النقط التي تنتمي للدائرة $x^2+y^2+4x-8y=108$ والتي عندها يكون المعدل الزمني لتغير x يساوي المعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t

نشتق معادلة الدائرة بالنسبة للزمن $x^2+y^2+4x-8y=108$

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}+4\frac{dx}{dt}-8\frac{dy}{dt}=0 \dots\dots(1)$$

∵ المعدل الزمني لتغير x = المعدل الزمني لتغير y $\Leftarrow \frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$ نعوض في (١)

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dx}{dt}+4\frac{dx}{dt}-8\frac{dx}{dt}=0$$

$$\frac{dx}{dt}(2x+2y+4-8)=0 \Longrightarrow \frac{dx}{dt}(2x+2y-4)=0$$

أما $\frac{dx}{dt}=0$ يهمل

أو $2x+2y-4=0] \div 2$

$x+y-2=0 \Rightarrow x=2-y \dots\dots(2)$

نعوض 2 في معادلة الدائرة الأصلية $(2-y)^2+y^2+4(2-y)-8y=108$

$4-4y+y^2+y^2+8-4y-8y=108 \Longrightarrow 2y^2-16y-96=0] \div 2$

$y^2-8y-48=0 \Longrightarrow (y-12)(y+4)=0$

أما $y-12=0 \Rightarrow y=12 \Rightarrow x=2-12 \Longrightarrow x=-10 \Longrightarrow (-10,12)$

أو $y+4=0 \Rightarrow y=-4 \Rightarrow x=2+4 \Longrightarrow x=6 \Longrightarrow (6,-4)$

∴النقاط هي $(6,-4),(-10,12)$

٥) متوازي سطوح مستطيلة أبعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل $(0.3cm/s)$ وارتفاعه يتناقص بمعدل $(0.5cm/s)$، جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة $(4cm)$ والارتفاع $(3cm)$

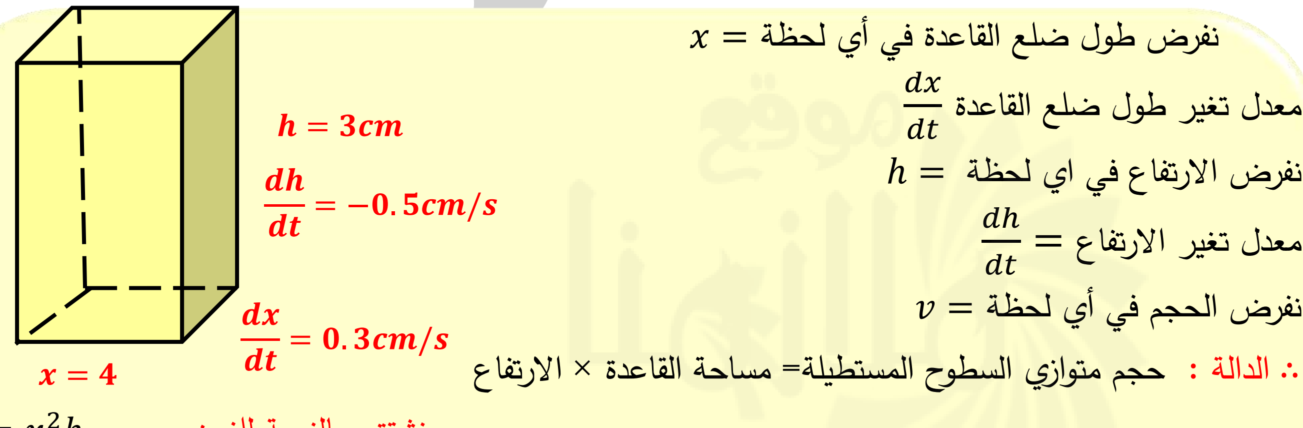
نفرض طول ضلع القاعدة في أي لحظة $=x$

معدل تغير طول ضلع القاعدة $\frac{dx}{dt}$

نفرض الارتفاع في اي لحظة $=h$

معدل تغير الارتفاع $=\frac{dh}{dt}$

نفرض الحجم في أي لحظة $=v$



∴ الدالة : حجم متوازي السطوح المستطيلة= مساحة القاعدة × الارتفاع

$v=x^2h$ نشتق بالنسبة للزمن

$$\frac{dv}{dt}=x^2\frac{dh}{dh}+h\left(2x\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{dv}{dt}=x^2\frac{dh}{dt}+2xh\frac{dx}{dt}$$ نعوض القيم المعطاة في السؤال

$$\frac{dv}{dt}=(4)^2(-0.5)+(3)\big(2(4)(0.3)\big) \Longrightarrow \frac{dv}{dt}=(16)\left(\frac{-1}{2}\right)+(24)\left(\frac{3}{10}\right)$$

$$\frac{dv}{dt}=-8+\frac{72}{10}\ \frac{dv}{dt}=\frac{-80+72}{10} \Rightarrow \frac{dv}{dt}=\frac{-8}{10} \Rightarrow \frac{dv}{dt}=-0.8cm^3/s$$ معدل تغير الحجم



اسئلة إثرائية

س/ يتساقط رمل على الأرض مكوناً جسماً مخروطياً بمعدل $(0.45m^3/s)$ فإذا كان قطر قاعدة المخروط يساوي ثلاثة أمثال الارتفاع أوجد معدل التغير في الارتفاع عندما يكون الارتفاع يساوي $(0.2m)$.

نفرض ارتفاع المخروط في أي لحظة $= h$

نفرض نصف قطر المخروط في أي لحظة $= r$

نفرض حجم المخروط في أي لحظة $= v$

نفرض معدل تغير حجم المخروط $\frac{dv}{dt}$

العلاقة: ∵ القطر = ثلاثة أمثال الارتفاع

$$\therefore 2r = 3h \Rightarrow r = \frac{3}{2}h \;\dots\dots\dots(1)$$

الدالة

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h \;\dots\dots\dots(2)$$

نعوض 1 في 2

$$v = \frac{\pi}{3}\left(\frac{3}{2}h\right)^2 h$$

$$v = \frac{\pi}{3}\left(\frac{9}{4}h^2\right) h$$

نشتق بالنسبة للزمن

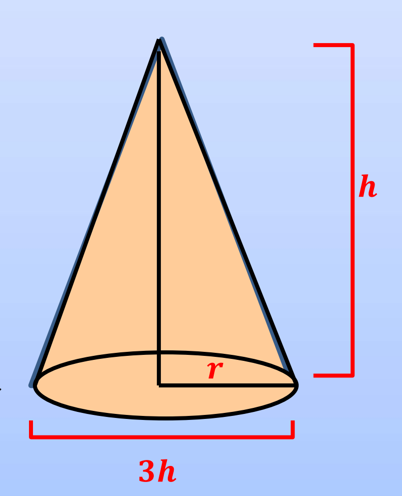
$$v = \frac{3\pi}{4}h^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{3\,\pi}{4}\left(3h^2\frac{dh}{dt}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{9\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt} \qquad , \because \frac{dv}{dt} = 0.45m^3/s \,, h = 0.2m$$

$$\therefore 0.45 = \frac{9\pi}{4}(0.2)^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{45}{100} = \frac{9\pi}{4}\left(\frac{4}{100}\right)\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{45}{100} = \frac{9\pi}{100}\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{45}{100} * \frac{100}{9\pi} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{5}{\pi}m/s$$



س/ أوجد نقطة أو نقط على المنحني $x^2 - xy + y^2 = 1$ والتي يكون عندها معدل التغير الزمني لـ (x) هو ضعف معدل تغير (y) بالنسبة للزمن.

نشتق الدالة $x^2 - xy + y^2 = 1$ بالنسبة للزمن

$$\therefore 2x\frac{dx}{dt} - \left[x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}\right] + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

توزيع الإشارة السالبة على القوس

$$2x\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

∵ المعدل الزمني لتغير x هو ضعف المعدل الزمني لتغير y $\Leftarrow \frac{dx}{dt} = 2\frac{dy}{dt}$

$$2x\left(2\frac{dy}{dt}\right) - x\frac{dy}{dt} - y\left(2\frac{dy}{dt}\right) + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

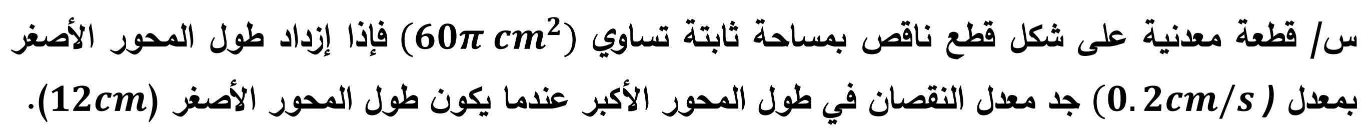
$$\frac{dy}{dt}[4x - x - 2y + 2y] = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt}(3x) = 0$$

أما $\frac{dy}{dt} = 0$ يهمل

أو $3x = 0 \Rightarrow x = 0$ نعوض في منحني الدالة

$$(0)^2 - (0)y + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \mp 1$$

∴ النقط هي $(0,1)$, $(0,-1)$



س/ قطعة معدنية على شكل قطع ناقص بمساحة ثابتة تساوي ($60\pi\ cm^2$) فإذا إزداد طول المحور الأصغر بمعدل ($0.2cm/s$) جد معدل النقصان في طول المحور الأكبر عندما يكون طول المحور الأصغر ($12cm$).

نفرض طول المحور الكبير في أي لحظة $2a$ و نفرض طول المحور الصغير في أي لحظة $2b$

نفرض مساحة القطع A

$A = ab\pi$

$60\pi = ab\pi \Rightarrow 60 = ab \ \dots\dots\dots\dots (1)$ الدالة

$\because 2b = 12 \Rightarrow b = 6$

$60 = 6a \Rightarrow a = 10$ نعوض في ١ لاستخراج قيمة a

$0 = a\frac{db}{dt} + b\frac{da}{dt}$ مشتقة حاصل ضرب دالتين

$0 = (10)\left(\frac{2}{10}\right) + (6)\frac{da}{dt}$ نعوض قيم a, b في المشتقة

$0 = 2 + 6\frac{da}{dt} \Rightarrow 6\frac{da}{dt} = -2$

$\frac{da}{dt} = -\frac{2}{6} \Rightarrow \frac{da}{dt} = \frac{-1}{3} cm/s$ معدل التغير في طول المحور الكبير

$\therefore$ معدل النقصان في طول المحور الكبير هو $\frac{1}{3} cm/s$

$2b = 12$

$2a$

س/ اسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل ($0.5cm/s$) بحيث يظل حجمها دائماً مساوياً إلى ($320\pi cm^3$) جد معدل تغير نصف قطر القاعدة عندما يكون الارتفاع ($5cm$).

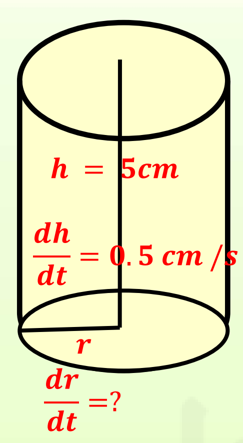
نفرض نصف قطر الاسطوانة في أي لحظة $= r$

معدل تغير نصف القطر $\frac{dr}{dt}$

نفرض ارتفاع الاسطوانة في أي لحظة $= h$

معدل تغير الارتفاع $\frac{dh}{dt}$

نفرض حجم الاسطوانة $= v$



$v = \pi r^2 h$

$320\pi = \pi r^2 h$

$320 = r^2 h \ \dots\dots (1)$

$320 = 5r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{320}{5} \Rightarrow r^2 = 64 \Rightarrow r = 8$ لتقليل المجاهيل نعوض قيمة $h = 5$ في 1

$0 = r^2\frac{dh}{dt} + h\left(2r\frac{dr}{dt}\right)$ نشتق 1 بالنسبة للزمن

$0 = r^2\frac{dh}{dt} + 2hr\frac{dr}{dt} \ \dots\dots\dots 2$

$0 = (8)^2\left(\frac{1}{2}\right) + 2(5)(8)\frac{dr}{dt}$ نعوض القيم المعطاة في السؤال والتي حصلنا عليها في 2 .

$0 = \frac{64}{2} + 80\frac{dr}{dt}$

$0 = 32 + 80\frac{dr}{dt}$

$80\frac{dr}{dt} = -32 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{-32}{80} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{-2}{5} cm/s$ معدل تغير نصف قطر القاعدة

س/ بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقب ، يتسرب منه الغاز فإذا كان معدل نقصان نصف قطره $\left(\frac{7}{22} cm/s\right)$ بحيث يبقى محافظاً على شكله فعندما يكون نصف القطر $(10cm)$ جد : ١) معدل نقصان حجمه. ٢) معدل نقصان مساحته السطحية.

نفرض نصف قطر البالون في أي لحظة $= r$

معدل نقصان نصف القطر $\frac{-7}{22}$ (الإشارة السالبة دلالة على النقصان)

نفرض حجمه في أي لحظة v

نفرض مساحته السطحية في أي لحظة A

$r = 10$, $\frac{dr}{dt} = \frac{-7}{22}$

1) $v = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{dv}{dt} = \frac{4\pi}{3}\left(3r^2 \frac{dr}{dt}\right) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \; \ldots\ldots (1)$

$\frac{dv}{dt} = 4\pi (10)^2 \left(\frac{-7}{22}\right)$ نعوض قيم $r, \frac{dr}{dt}$ في 1

$\because \pi = \frac{22}{7} \Longrightarrow \frac{dv}{dt} = 4\left(\frac{22}{7}\right)(100)\left(\frac{-7}{22}\right) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -400\ cm^3/s$ معدل تغير حجم البالون

$\therefore$ معدل النقصان في حجم البالون $(400 cm^3/s)$

2) $A = 4\pi r^2$

$\frac{dA}{dt} = 4\pi\left(2r \frac{dr}{dt}\right)$ نشتق بالنسبة للزمن

$\frac{dA}{dt} = 4\pi\left(2(10)\frac{dr}{dt}\right) \Longrightarrow \frac{dA}{dt} = 80\pi \frac{dr}{dt} \; \ldots\ldots (2)$

$\frac{dA}{dt} = 80\left(\frac{22}{7}\right)\left(\frac{-7}{22}\right) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = -80 cm^2/s$ نعوض قيم $\frac{dr}{dt}, \pi = \frac{22}{7}$ في (2)

$\therefore$ معدل النقصان في المساحة السطحية $(8cm^2/s)$

س/ طريقان متعامدان يلتقيان بنقطة M تحركت سيارتان في نقطة M كل منهما في طريق وكان معدل سرعة السيارة الأولى $(80km/h)$ ومعدل سرعة السيارة الثانية $60\ km/h$ جد معدل الابتعاد بين السيارتين بعد ربع ساعة من بدء الحركة من M.

نفرض المسافة التي قطعتها السيارة الأولى $= x$

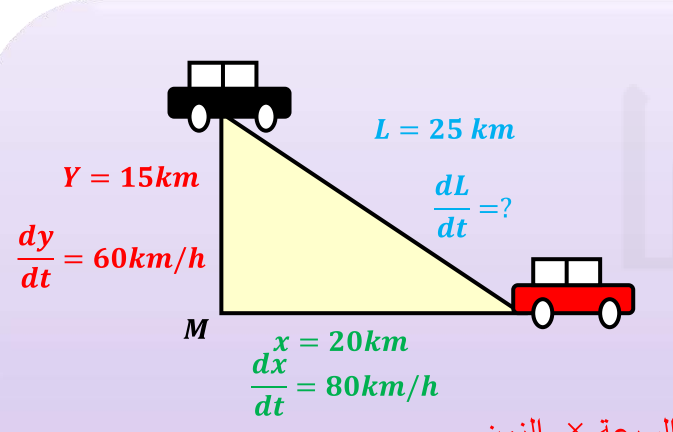
معدل سرعة السيارة الاولى $\frac{dx}{dt}$

نفرض المسافة التي قطعتها السيارة الثانية $= y$

معدل سرعة السيارة الثانية $\frac{dy}{dt}$

نفرض المسافة بين السيارتين L

معدل الابتعاد $\frac{dl}{dt}$



المسافة (السيارة الأولى) = السرعة × الزمن

$x = 80 * \frac{1}{4} \Rightarrow x = 20\ km$

$y = 60 * \frac{1}{4} \Rightarrow y = 15\ km$ المسافة (السيارة الثانية)

$L^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow L^2 = (20)^2 + (15)^2$ من مبرهنة فيثاغورس نجد قيمة L

$L^2 = 400 + 225 \Rightarrow L^2 = 625$

$L = 25km$

$\because L^2 = x^2 + y^2$

$2L\frac{dL}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}\ ] \div 2$ نشتق بالنسبة للزمن

$L\frac{dL}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} \dots\dots(1)$

$25\frac{dL}{dt} = 20\,(80) + 15\,(60)$ نعوض قيم السؤال والتي استخرجناها ضمن الحل في 1

$25\frac{dL}{dt} = 1600 + 900 \Rightarrow 25\frac{dL}{dt} = 2500 \Longrightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{2500}{25} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 100km/h$

معدل الابتعاد بين السيارتين.

س/ مثلث قائم الزاوية طول وتره ثابت يساوي $(40cm)$ يتغير الضلع القائم الأول بمعدل $(12cm/min)$ جد معدل التغير في الضلع الثاني في اللحظة التي يكون فيها طول الضلع الأول يساوي $(32cm)$

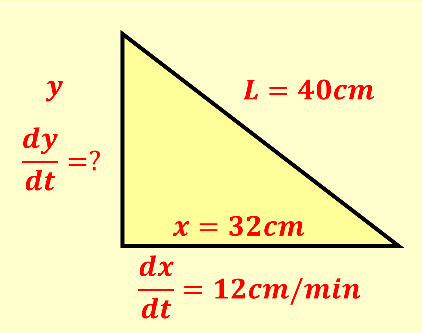
نفرض طول الضلع الأول في أي لحظة x

معدل تغير طول الضلع الأول $\frac{dx}{dt}$

نفرض طول الضلع الثاني في أي لحظة y

معدل تغير طول الضلع الثاني $\frac{dy}{dt}$

نفرض طول الوتر $= L$



من مبرهنة فيثاغورس نجد طول الضلع الثاني

$L^2 = x^2 + y^2$

$(40)^2 = x^2 + y^2$

$1600 = x^2 + y^2 \dots\dots(1)$

$1600 = (32)^2 + y^2$

$1600 = 1024 + y^2 \Rightarrow y^2 = 1600 - 1024 \Rightarrow y^2 = 576 \Longrightarrow y = 24$

$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}] \div 2$ نشتق 1 بالنسبة للزمن

$0 = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$

$0 = 32\,(12) + (24)\frac{dy}{dt} \Longrightarrow 0 = 384 + 24\frac{dy}{dt} \Rightarrow 24\frac{dy}{dt} = -384$

$\frac{dy}{dt} = \frac{-384}{24} \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = -16cm/min$ معدل التغير في طول الضلع الثاني

مبرهنتا رول والقيمة المتوسطة

قبل ان نتعرف على هذا البند إلى مبرهنتي رول والقيمة المتوسطة نذكر بعض التعاريف والمبرهنة التي تمهد لهاتين المبرهنتين

تعريف : أذا كانت f دالة معرفة على الفترة المغلقة (a,b) فإن

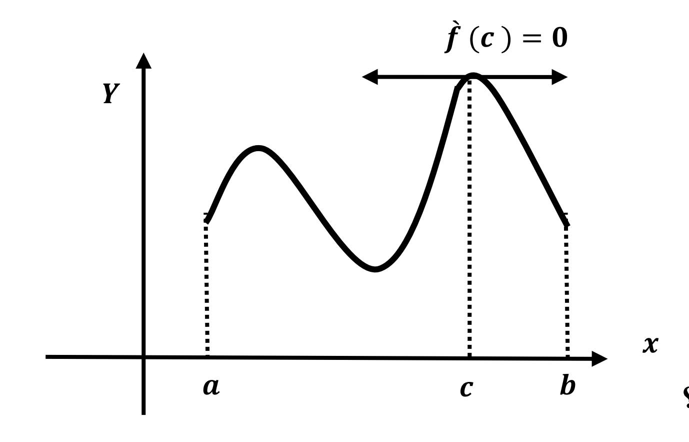
١) f تأخذ قيمة عظمى عند c حيث $c \in [a,b]$ إذا وفقط إذا

$f(c) \geq f(x)$ لكل $x \in [a,b]$

٢) f تأخذ قيمة صغرى عند c حيث $c \in [a,b]$ إذا وفقط إذا

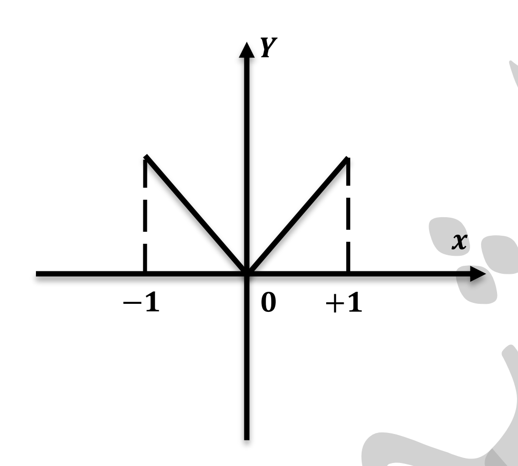
$f(c) \leq f(x)$ لكل $x \in [a,b]$

مبرهنة : أذا كانت f دالة معرفة على الفترة المغلقة (a,b) وكان
للدالة قيمة عظمى أو صغرى عند c حيث $c \in (a,b)$ وإن $f'(c)$ موجودة فإن $f'(c)=0$



وسنكتفي بتوضيح هذه المبرهنة هندسياً كما يأتي
عند النقطة c المختلفة عن a , b والتي تأخذ عندها
الدالة قيمة عظمى أو صغرى يكون المماس للمنحني
البياني للدالة أفقياً (أي موازي لمحور السينات).
والآن يمكن ان تفكر في إجابة للسؤال الآتي:
إذا كان للدالة f قيمة عظمى أو قيمة صغرى عند
C حيث $c \in (a,b)$ فهل يشترط ان يكون $f'(c)=0$ ؟
وللأجابة على السؤال اليك المثال الآتي

مثال



لتكن $f:[-1,1] \to R, f(x)=|x|$
وكما تلاحظ في الشكل فإن الدالة f تمتلك
أعظم قيمة عند كل من $x=1, x=-1$
وتمتلك أصغر قيمة عند $x=0$ وانت تعلم
من دراستك السابقة ان الدالة f غير قابلة
للأشتقاق عند $x=0$ أي ان $f'(0)$ غير موجودة
$\therefore$ لا يشترط ان يكون $f'(c)=0$

تعريف : لتكن الدالة f معرفة عند العدد c يقال عن العدد c بأنه عدد حرج (*Critical Number*) إذا كان $f'(c)=0$ أو ان الدالة غير قابلة للأشتقاق في c وتسمى النقطة $(c,f(c))$ بالنقطة الحرجة

ففي المثال السابق

$f:[-1,1] \to R \qquad f(x)=|x|$

نلاحظ ان الدالة معرفة عند صفر ، وان $f'(0)$ غير موجودة
لذا يقال ان العدد (صفر) هو العدد الحرج للدالة f وان النقطة $(0,f(0))$ هي النقطة الحرجة.

مراجعة الغايات والاستمرارية

الغايات: ملاحظات مهمة

١- إذا كانت الدالة كثيرة حدود فالغاية تكون بالتعويض المباشر في الدالة لقيمة x المعطاة في السؤال.

ex) $\lim_{x\to -1} (x^2+3x) = (-1)^2 + 3(-1) = 1 - 3 = -2$

٢- إذا كانت الدالة كسرية وعند التعويض بقيمة x المعطاة في السؤال في مقام الدالة يكون ناتج المقام يساوي صفر ففي هذه الحالة يجب تبسيط الدالة وذلك باستخدام طرق التحليل والاختصار مع المقام ومن ثم نعوض تعويض مباشر بقيمة x المعطاة في السؤال. **ex)**

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-2}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2(x^2-1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1} 2(x+1) = 2(1+1) = 2(2) = 4$$

عند التعويض $x = 1$ في المقام يكون ناتج المقام $= 0$ بهذه الحالة تكون الدالة غير معرفة إذاً يجب تبسيط البسط ومن ثم الاختصار مع المقام ومن ثم التعويض.

٣- أذا كانت الدالة ذات قاعدتين ففي هذه الحالة نبحث الغاية من يمين x ونفرضها تساوي L_1 ونبحث الغاية من يسار x ونفرضها تساوي L_2

a) إذا كان $L_1 = L_2$ فعند ذلك توجد غاية عند قيمة x

b) إذا كانت $L_1 \neq L_2$ فذلك يعني انه لا توجد غاية عند قيمة x

مثال لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2+4 & x \ge 1 \\ 5x & x < 1 \end{cases}$ جد $\lim_{x\to 1} f(x)$

الغاية من اليمين. [التعويض بالدالة المقابلة لـ $x \ge 1$]

$\lim_{x\to 1} x^2 + 4 = (1)^2 + 4 = 1 + 4 = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots L_1$

الغاية من اليسار [التعويض بالدالة المقابلة لـ $x < 1$]

$\lim_{x\to 1} 5x = 5(1) = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots L_2$

$\because L_1 = L_2$ $\therefore$ توجد غاية عند $x = 1$

مثال لتكن $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ جد $\lim_{x\to 1} f(x)$

نستخرج الحد الفاصل $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ وذلك بمساواة الدالة تحت المطلق للصفر وثم ايجاد قيمه x نعرف المطلق وذلك بأخذ القيمتين الأساسيتين للدالة والتي هي $\mp\frac{(x-1)}{x-1}$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{+(x-1)}{(x-1)} & x \ge 1 \\ \frac{-(x-1)}{(x-1)} & x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$$

الغاية من اليمين $\lim_{x\to 1}(1) = 1 \ldots\ldots\ldots L_1$ [غاية الثابت = الثابت نفسه]

الغاية من اليسار $\lim_{x\to 1}(-1) = -1 \ldots\ldots\ldots L_2$ $\because L_1 \neq L_2$ $\therefore$ لا توجد غاية عند $x = 1$

الأستمرارية

تكون الدالة مستمرة عند $x = b$ إذا حققت الشروط الثلاث التالية:

1) $f(b)$ معرفة

2) $\lim_{x\to b} f(x)$ موجودة

3) $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$

ملاحظة: إذا كانت الدالة $f(x)$ كثيرة حدود فهي مستمرة $\forall\, x \in R$

ملاحظة: تكون الدالة $f(x)$ غير مستمرة عند $x = b$ في الحالات الآتية:

a) $b \notin$ لمجال الدالة

b) $\lim_{x\to b} f(x)$ ليس لها وجود

c) $\lim_{x\to b} f(x) \neq f(b)$

مثال إذا كانت $f(x) = 8 - x^3 - 2x^2$ أثبت ان الدالة مستمرة.

$\therefore$ Let $b \in R \Longleftarrow$ [$\because$ لا يوجد في السؤال قيمة x]

1) $f(b) = 8 - b^3 - 2b^2$ معرفة [ايجاد صورة b]

2) $\lim_{x\to b} 8 - x^3 - 2x^2 = 8 - b^3 - 2b^2$ موجودة [ايجاد الغاية عند $x = b$]

3) $f(b) = \lim_{x\to b} f(x)$ [صورة b = الغاية عندما $x = b$]

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x = b$

$\because$ b تمثل كل عنصر من عناصر المجال $\therefore$ $f(x)$ مستمرة $\forall x \in R$ $\therefore$ $f(x)$ مستمرة

ملاحظة: إذا كانت الدالة ذات قاعدتين أو أكثر فيكون حساب الاستمرارية عند العدد الفاصل.

مثال إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 6 - x^2 & x \geq 1 \\ 4x + 1 & x < 1 \end{cases}$ أبحث عن الاستمرارية عند $x = 1$

1) $f(1) = 6 - (1)^2 = 6 - 1 = 5$ التعويض في الدالة التي تحتوي على المساواة

2) الغاية من اليمين $\lim_{x\to 1}(6 - x^2) = 6 - (1)^2 = 6 - 1 = 5 \ldots\ldots\ldots L_1$

الغاية من اليسار $\lim_{x\to 1}(4x + 1) = 4(1) + 1 = 4 + 1 = 5 \ldots\ldots\ldots L_2$

$\because L_1 = L_2$ $\therefore$ توجد غاية عند $x = 1$

3) $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x = 1$

ملاحظة : نجد غاية اليمين وغاية اليسار فإذا كان $L_1 = L_2$ إذن نختبر الشرط الثالث للاستمرارية وإذا كان $L_1 \neq L_2$ فهذا يعني انه لا توجد غاية وبالتالي لا توجد استمرارية.

مثال إذا كانت $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\geq 2 \\ 8-x & x<2 \end{cases}$ أثبت ان الدالة مستمرة على R

∵ لم يحدد في السؤال قيمة x ∴ نبحث الاستمرارية عند الحد الفاصل وهو $x=2$

وعن يمين الحد الفاصل $x>2$ وعن يسار الحد الفاصل $x<2$

١) نثبت أن الدالة مستمرة عند $x=2$

1) $f(2)=(2)^2+2=4+2=6$

2) $\lim_{x\to 2}(x^2+2)=(2)^2+2=4+2=6 \ldots\ldots\ldots\ldots L_1$

$\lim_{x\to 2}(8-x)=8-2=6 \ldots\ldots\ldots\ldots L_2$

∵ $L_1=L_2$ ∴ توجد غاية عند $x=2$

3) $f(2)=\lim_{x\to 2}(x)$

∴الدالة مستمرة عند $x=3$

٢) $\forall\, a>2$

1) $f(a)=a^2+2$

2) $\lim_{x\to a}(x^2+2)=a^2+2$

3) $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$

∴الدالة مستمرة عند $x=a$ ∴ الدالة مستمرة عند $\forall x>2$

٣) $\forall a<2$

1) $f(a)=8-a$

2) $\lim_{x\to a}(8-x)=8-a$

3) $f(a)=\lim_{x\to 2} f(x)$

∴الدالة مستمرة عند $x=a$ ، الدالة مستمرة $\forall\, x<2$

∵ الدالة مستمرة عند $x=2$, $\forall x>2$, $\forall x<2$ ∴ الدالة مستمرة في R

ملاحظات حول الاستمرارية

أ- إذا كانت الدالة كثيرة حدود فهي مستمرة $\forall x\in R$

ex) 1) $f(x)=x^2-4x+5$

دالة مستمرة $\forall x\in R$ لأنها كثيرة حدود

2) $f(x)=\frac{x^3-9x}{3}$ [تعتبر الدالة $f(x)$ كثيرة حدود لان المقام لا يحتوي على متغير]

دالة مستمرة $\forall x\in R$ لأنها كثيرة حدود

ب- إذا كانت الدالة كسرية

فهي مستمرة $\forall x\in R$ ما عدا أصفار المقام

ex) $f(x)=\frac{4}{x+2}$

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

∴ أوسع مجال للدالة $R\setminus\{-2\}$ ∴ الدالة $f(x)$ مستمرة $\forall x\in R\setminus\{-2\}$

قابلية الاشتقاق

تكون الدالة $f(x)$ قابلة للأشتقاق عند النقطة $x \in (a,b)$ إذا تحقق الشرطان الآتيان

١–الدالة مستمرة في $[a,b]$

٢ – النهاية موجودة

لبحث قابلية الاشتقاق نتبع الآتي

١ – نجد أوسع مجال للدالة ونتأكد من أنها معرفة عند $x = b$

٢– نجد $f'(b)$

فإذا كانت الدالة

أ– كثيرة حدود فإن $f'(b)$ موجودة وتكون قابلة للأشتقاق في R

ب– إذا كانت الدالة كسرية فإن $f'(b)$ موجودة في مجال الدالة $R \setminus$ [أصفار المقام]

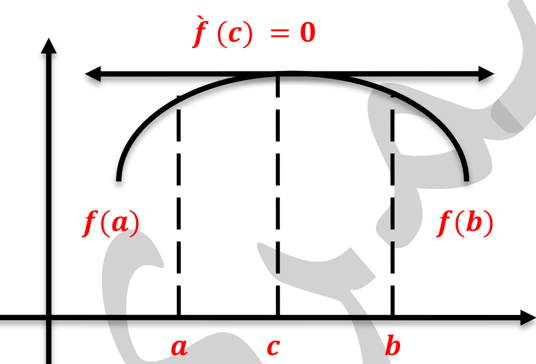
ج– إذا كانت الدالة ذات قاعدتين $\{x < b, x \geq b\}$ فيجب بحث $f'(b)$ من جهة اليمين و $f'(b)$ من جهة اليسار فيكون احتمالين

– أما $L_1 = L_2$ فذلك معناه $f'(b)$ موجودة والدالة قابلة للأشتقاق عند $x = b$

– أو $L_1 \neq L_2$ فذلك معناه $f'(b)$ غير موجودة والدالة غير قابلة للأشتقاق عند $x = b$

ملاحظة: إذا كانت الدالة قابلة للأشتقاق فإنها مستمرة لكن العكس غير

مــــبـــرهنـــة رول



شروط مبرهنة رول

إذا كانت الدالة f

١ – مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$

٢ – قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b)

٣– $f(b) = f(a)$

فإنه يوجد على الأقل قيمة واحدة c تنتمي إلى (a,b) وتحقق : $\acute{f}(c) = 0$

مثال بين هل ان مبرهنة رول تتحقق لكل من الدوال التالية ؟ وجد قيمة c الممكنة

a) $f(x) = (2-x)^2$ $\qquad x \in [0,4]$

١ – الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0,4]$ لأنها كثيرة حدود

٢– الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0,4)$ لأنها كثيرة حدود.

نعوض بداية الفترة $a = 0$ ونهاية الفترة $b = 4$ في الدالة الأصلية من ثم نقارن صورة (0) مع صورة (4) فإذا كانوا متساوين فإن المبرهنة متحققة أما إذا لم يتساوون فإن المبرهنة لا تتحقق.

3) $f(0) = (2-0)^2 = 4$

$f(4) = (2-4)^2 = 4$

$f(0) = f(4)$

$\therefore f(a) = f(b)$

$\therefore$ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول ضمن الفترة المعطاة

∵ الشروط الثلاثة متحققة إذن نجد قيمة c وذلك بإتباع الآتي:

١- نجد $f'(x)$

٢- نعوض c في المشتقة $f'(c)$

٣- نجعل $f'(c) = 0$

٤- نجد قيمة c [توجد على الأقل قيمة واحدة لـ (c) تنتمي إلى الفترة المفتوحة المعطاة في السؤال].

∵ الدالة $f(x) = (2-x)^2$ تحقق شروط مبرهنة رول ∴ نجد قيمة c الممكنة.

$$f'(x) = 2\,(2-x)(-1) = -2(2-x)$$
$$f'(c) = -2(2-c)$$
$$f'(c) = 0$$
$$-2\,(2-c) = 0\,] \div -2$$
$$2-c = 0 \Rightarrow c = 2 \in (0\,,4)$$

b) $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3, \qquad x \in [-1,1]$

١- الدالة مستمرة على $[-1,1]$ لأنها كثيرة حدود

٢- الدالة قابلة للاشتقاق على $(-1,1)$ لأنها كثيرة حدود

3) $f(-1) = 9(-1) + 3(-1)^2 - (-1)^3 = -9 + 3 + 1 = -5$

$f(1) = 9(1) + 3(1)^2 - (1)^3 = 9 + 3 - 1 = 11$

$\because f(-1) \neq f(1)$

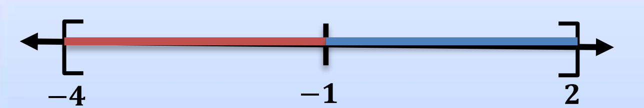
$\therefore f(a) \neq f(b)$

∴لا تتحقق مبرهنة رول لأن الشرط الثالث لم يتحقق ∴ لا توجد قيمة لـ (c) تنتمي للفترة

c) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \in [-1,2] \\ -1 & x \in [-4,-1) \end{cases}$

نجد مجال الدالة وذلك باتحاد الفترتين $(-1,-4],[-1,2]$ وذلك لأن الدالة مكونة من قاعدتين

∴ مجال الدالة هو $[-4,2]$



نبحث الاستمرارية عند قيمة الحد الفاصل وهو (-1)

الغاية من اليمين $\lim_{x\to -1} x^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots L_1$

الغاية من اليسار $\lim_{x\to -1}(-1) = -1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots L_2$

$\because L_2 \neq L_2$ ∴ لا توجد غاية عند $x = -1$

∴ الدالة ليست مستمرة على $[-4,2]$ ∴ الدالة لا تحقق مبرهنة رول.

d) $f(x) = k \quad , x \in [a,b]$

١- الدالة مستمرة على $[a,b]$ لأنها دالة ثابتة

٢- الدالة قابلة للاشتقاق على (a,b) لأنها دالة ثابتة

3) $f(a) = k$

$f(b) = k$

$\therefore f(a) = f(b)$

∴ الدالة تحقق مبرهنة رول وأن قيمة c يمكن ان تكون أي قيمة ضمن الفترة (a,b)

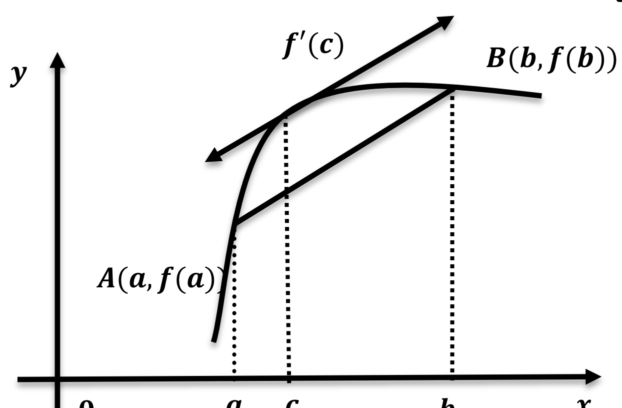
[وذلك لأن $f'(x) = 0 \Leftarrow f'(c) = 0$ لأنها دالة ثابتة].



مبرهنة القيمة المتوسطة

إذا كانت f دالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b) فإنه يوجد على الأقل قيمة واحدة c ينتمي إلى (a,b) وتحقق $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ أو $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

والمخطط التالي يعطي التفسير الهندسي لمبرهنة القيمة المتوسطة



المماس يوازي الوتر، ميل المماس $f'(c)$

ميل الوتر المار بالنقطتين A, B يساوي $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

ميل المماس عند c = المشتقة الأولى للدالة f عند c, $(f'(c))$

لكن المماس والوتر متوازيان لذا يتساوى ميلاهما

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ملاحظة:ان مبرهنة رول هي حالة خاصة من مبرهنة القيمة المتوسطة ففي مبرهنة رول يجب ان توافر شرط ثالث هو $f(a)=f(b)$ أي ان الوتر والمماس يوازيان محور السينات أي فرق الصادات =0 لذا يصبح الميل =0 فنحصل على $f'(c)=0$

مثال برهن ان الدوال التالية تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة وأوجد قيم c الممكنة

$a)\ f(x)=x^2-6x+4 \qquad x\in[-1,7]$

١- الدالة مستمرة على $[-1,7]$ لأنها كثيرة حدود.

٢- الدالة قابلة للاشتقاق على $(-1,7)$ لأنها كثيرة حدود.

3) $f'(x)=2x-6$ ميل المماس

$f'(c)=2c-6$

ميل الوتر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(7)-f(-1)}{7-(-1)}=\frac{[(7)^2-6(7)+4]-[(-1)^2-6(-1)+4]}{7+1}$

$=\frac{11-11}{8}=\frac{0}{8}=0$

$\because$ ميل المماس = ميل الوتر

$\therefore 2c-6=0$

$2c=6\Rightarrow c=3\in(-1,7)$

لإيجاد الشرط الثالث من مبرهنة القيمة المتوسطة نتبع الآتي:

١- نجد ميل المماس: وذلك باشتقاق الدالة $f(x)$ ومن ثم تعويض c في المشتقة حتى نحصل على $f'(c)$

٢- نجد ميل الوتر: وذلك بإيجاد صورة b وصورة a واستخدامها في القانون $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

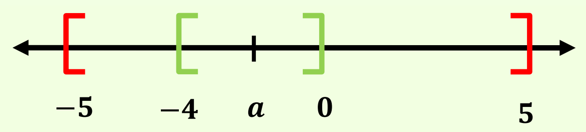
٣- نساوي ناتج ميل المماس مع ناتج ميل الوتر $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$b)\ f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ $\quad x \in [-4, 0]$

أوسع مجال للدالة هو $25 - x^2 \geq 0$

$[-x^2 \geq -25] * -1$

$x^2 \leq 25 \Rightarrow x \leq \mp 5 \Rightarrow -5 < x < 5$ أي ان $x \in [-5,5]$



ملاحظة: الفترة المعطاة في السؤال ∋ إلى مجال الدالة

١– الاستمرارية في $[-4,0]$: نثبت أولاً الاستمرارية في الفترة المفتوحة $(-4,0)$ بعدها عن طرفي الفترة.

$Let \quad a \in (-4,0)$

$f(a) = \sqrt{25 - a^2}$ (لأن a ضمن المجال)

$\lim_{x\to a} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - a^2}$

$\lim_{x\to a} \sqrt{25 - x^2} = f(a)$

∴ الدالة مستمرة في $(-4,0)$

الآن نثبت الاستمرارية عن يمين a عند $x = 0$

$f(0) = \sqrt{25 - 0} = \sqrt{25} = 5$

$\lim_{x\to 0} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 0} = \sqrt{25} = 5$

$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$

نثبت الاستمرارية عن يسار a عند $x = -4$

$f(-4) = \sqrt{25 - (-4)^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$

$\lim_{x\to -4} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$

$\lim_{x\to -4} f(x) = f(-4)$

∴ $f(x)$ مستمرة عند طرفي $[-4,0]$ ∴ f مستمرة على الفترة المغلقة $[-4,0]$

٢– قابلية الاشتقاق : ∵ مجال الدالة $(-5,5)$ ∴ f قابلة للاشتقاق في الفترة $(-4,0)$ وذلك لأنها محتواة كلياً ضمن مجالها.

ملاحظة: في حالة الدوال الجذرية ذات الدليل الزوجي فإذا كانت الدالة مستمرة فهي قابلة للاشتقاق

٣– ميل المماس : $f(x) = (25 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

ميل المماس $f'(x) = \frac{1}{2}(25 - x^2)^{\frac{-1}{2}}(-2x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \Rightarrow f'(c) = \frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}$

ميل الوتر : $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{f(0) - f(-4)}{0-(-4)} = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ميل الوتر

∵ ميل المماس = ميل الوتر $\Rightarrow \frac{-c}{\sqrt{25-c^2}} = \frac{1}{2}$

$-2c = \sqrt{25 - c^2}$ بتربيع الطرفين

$4c^2 = 25 - c^2 \Rightarrow 4c^2 + c^2 = 25 \Rightarrow 5c^2 = 25 \Rightarrow c^2 = 5 \Rightarrow c = \mp\sqrt{5}$

$c = \sqrt{5} \notin (-4,0)$

$c = -\sqrt{5} \in (-4,0)$

مثال إذا كانت $f(x) = x^3 - 4x^2$ ، $f: [0, b] \to R$ وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c = \frac{2}{3}$ جد قيمة b

∵ f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة ∴ تحقق جميع شروطها ومن ضمنها $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$f'(x) = 3x^2 - 8x$

$f'(c) = 3c^2 - 8c$

ميل المماس $f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{4}{9}\right) - \frac{16}{3} = \frac{4}{3} - \frac{16}{3} = \frac{-12}{3} = -4$

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(b^3 - 4b^2) - (0 - 0)}{b - 0} = \frac{b^3 - 4b^2}{b} = \frac{b(b^2 - 4b)}{b}$

ميل الوتر $= b^2 - 4b$

∵ ميل الوتر = ميل المماس

$\therefore b^2 - 4b = -4 \Longrightarrow b^2 - 4b + 4 = 0 \Longrightarrow (b - 2)(b - 2) = 0 \Longrightarrow b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2$

نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

إذا كانت f دالة مستمرة ومعرفة على (a, b) وقابلة للاشتقاق في (a, b) ولو اعتبرنا $h = b - a$ فإن $b = a + h$ حيث $h \neq 0, h \in R$ فإنه بموجب مبرهنة القيمة المتوسط نحصل على

$$f'(c) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \Rightarrow f(a+h) = f(a) + hf'(c)$$

وعندما يكون اقتراب b من a قربا كافياً تكون في هذه الحالة h صغيرة ويصبح الوتر صغيراً ونهايتيه قريبتان من a أي ان المماس عند c سيكون مماساً للمنحني عند نقطة قريبة جدا من النقطة حيث $x = a$ ولذلك يصبح

$$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$$

يقال للمقدار $hf'(a)$ التغير التقريبي للدالة

مثال جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة تقريباً مناسباً للعدد $\sqrt{26}$

١) نكون دالة تشابه الصيغة الجبرية الدالة $f(x) = \sqrt{x}$

٢) نختار عدد قريب جداً من العدد المعطى وله قيمة جبرية صحيحة .

∴ نفرض $a = 25$ [أقرب مربع كامل من العدد 26 لأن الدالة عبارة عن جذر تربيعي]

٣) نجد صورة العدد الذي فرضناه $f(a) = \sqrt{a} = \sqrt{25} = 5$

٤) نجد مشتقة الدالة عند العدد المفروض $f(x) = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(a) = f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{2(5)} = \frac{1}{10} = 0.1$

٥) نستخرج قيمة h وذلك بطرح العدد المفروض من العدد الحرج المذكور في السؤال

$h = b - a$

$h = 26 - 25 = 1$

$b = 26, a = 25, h = b - a, h = 26 - 25 = 1$

٦) نعوض قيم $f'(a). f(a), a$ في العلاقة $f(a+h) \cong f(a) + h\grave{f}(a)$



$f(25+1) \cong 5 + (1)(0.1)$
$f(26) \cong 5 + 0.1$
$\sqrt{26} \cong 5.1$

مثال إذا كان $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ جد بصورة تقريبية $f(1.001)$

نفرض $b = 1.001$ ∴ أقرب عدد صحيح للعدد 1.001 هو 1 ∴ نفرض $a = 1$

الفرضيات
$b = 1.001$
$a = 1$
$h = b - a$
$1.001 - 1 = 0.001$

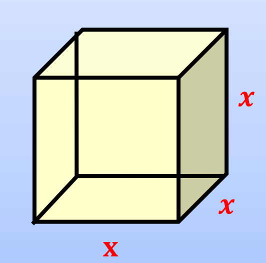
الدالة $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$

$f(a) = f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 + 4(1) + 5 = 1 + 3 + 4 + 5 = 13$
$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4$
$f'(1) = 3(1)^2 + 6(1) + 4 = 3 + 6 + 4 = 13$
$f(a+h) \cong f(a) + h\, f'(a)$
$f(1 + 0.001) \cong 13 + (0.001)(13)$
$f(1.001) \cong 13 + 0.013$
$f(1.001) \cong 13.013$

مثال مكعب طول حرفه $(9.98cm)$ جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

∵ المطلوب هو الحجم ∴ نفرض حجم المكعب v وطول الضلع x

حجم المكعب = $(\text{طول الضلع})^3$



$b = 9.98$
$a = 10$
$h = b - a$
$h = 9.98 - 10$
$h = -0.02$

$v = x^3$
$v(a) = v(10) = (10)^3 = 1000$
$\grave{v}(x) = 3x^2$
$\grave{v}(a) = \grave{v}(10) = 3(10)^2 = 300$
$v(a+h) \cong v(a) + h\,\grave{v}(a)$
$v(10 - 0.02) \cong 1000 + (-0.02)(300)$
$v(9.98) \cong 1000 - 6$
$\cong 994\ cm^3$

مثال لتكن $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ فإذا تغيرت x من 8 إلى 8.06 فما المقدار التغير التقريبي للدالة.

$b = 8.06$
$a = 8$
$h = 8.06 - 8$
$h = 0.06$

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ $\qquad f: [8, 8.06]$

$f'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f'(a) = f'(8) = \frac{2}{3\sqrt[3]{8}} = \frac{2}{3(2)} = \frac{1}{3} = 0.333$

[نأخذ ثلاث مراتب بعد الفارزة لأن العدد مكرر]

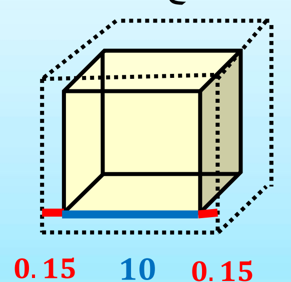
$\therefore hf'(a) = (0.06)(0.333) = 0.01998$ $\qquad$ [مقدار التغير التقريبي للدالة هو $hf'(a)$]

مثال يراد طلاء مكعب طول ضلعه $(10cm)$ فإذا كان سمك الطلاء $(0.15\ cm)$ أوجد حجم الطلاء بصورة تقريبية وباستخدام نتيجة القيمة المتوسطة

∵ المطلوب هو حجم الطلاء فقط ∴ الحل هو استخراج مقدار التغير التقريبي للدالة $hf'(a)$



طول الضلع بعد الطلاء $10 + 0.15 + 0.15 = 10.30 = 10.3$



$b = 10.3$
$a = 10$
$h = 10.3 - 10$
$h = 0.3$

$v(x) = x^3$
$v'(x) = 3x^2$
$v'(a) = v'(10) = 3(10)^2 = 300$
$h\, v'(a) \cong (0.3)(300) \cong 90cm^3$
حجم الطلاء بصورة تقريبية

مثال بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصورة تقريبية ومقرباً لثلاث مراتب عشرية على الأقل كلا من

a) $\sqrt[5]{(0.98)^3} + (0.98)^4 + 3$

$b = 0.98$
$a = 1$
$h = b - a$
$h = -0.02$

الدالة $f(x) = \sqrt[5]{x^3} + x^4 + 3 \Rightarrow f(x) = x^{\frac{3}{5}} + x^4 + 3$

$f(a) = f(1) = \sqrt[5]{(1)^3} + (1)^4 + 3 = 5$

$f'(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} + 4x^3$

$f'(x) = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} + 4x^3$

$f'(a) = \grave{f}(1) = \frac{3}{5\sqrt[5]{(1)^2}} + 4(1)^3 = \frac{3}{5} + 4 = \frac{3+20}{5} = \frac{23}{5} = 4.6$

$f(a+h) \cong f(a) + h\, f'(a)$
$f\big(1 + (-0.02)\big) \cong 5 + (-0.02)(4.6)$
$f(0.98) \cong 5 - 0.092$
$\sqrt[5]{(0.98)^3} + (0.98)^4 + 3 \cong 4.908$

b) $\sqrt[3]{7.8}$

$b = 7.8$
$a = 8$
$h = b - a$
$h = -0.2$

$f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{3}}$
$f(a) = f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(a) = f'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(8)^2}} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{8})^2} = \frac{1}{3(2)^2} = \frac{1}{12} = 0.083$

$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$
$f(8 - 0.2) \cong 2 + (-0.2)(0.083)$
$f(7.8) \cong 2 - 0.0166$
$\therefore \sqrt[3]{7.8} \cong 1.9834$

a اقرب عدد صحيح لقيمة b نستطيع استخراجه من تحت الجذر التكعيبي

C) $\sqrt{17} + \sqrt[4]{17}$

$b = 17$
$a = 16$ اقرب عدد لـ 17 نستطيع استخراجه من تحت الجذر الثاني والرابع معاً
$h = b - a$
$h = 1$

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}$

$f(a) = f(16) = \sqrt{16} + \sqrt[4]{16} = 4 + 2 = 6$

$f'(x) = \frac{1}{2}\, x^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$



$f'(a) = f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{(16)^3}} = \frac{1}{2(4)} + \frac{1}{4(\sqrt[4]{16})^3}$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4(2)^3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{4+1}{32} = \frac{5}{32} = 0.156$

$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$

$f(16+1) \cong 6 + (1)(0.156)$

$f(17) \cong 6 + 0.156$

$\sqrt{17} + \sqrt[4]{17} \cong 6.156$

$d)\ \sqrt[3]{0.12}$

ملاحظة مهمة : إذا كان تحت الجذر عدد عشري فيجب تسوية المراتب بعد الفارزة حسب دليل الجذر.
في هذا السؤال الجذر تكعيبي فيجب ان تكون المراتب بعد الفارزة ثلاثة وليس اثنان إذن نضيف صفر ليمين العدد فيصبح $b = 0.120$

$b = 0.120$
$a = 0.125$
$h = b - a = -0.005$

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ الدالة

$f(a) = f(0.125) = \sqrt[3]{0.125} = 0.5$

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(a) = f'(0.125) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0.125)^2}} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{0.125})^2} = \frac{1}{3(0.5)^2}$

$= \frac{1}{3(0.25)} = \frac{1}{0.75} = 1.333$

$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$

$f(0.125 - 0.005) \cong 0.5 + (-0.005)(1.333)$

$f(0.120) \cong 0.5 - 0.006665$

$\sqrt[3]{0.12} \cong 0.493335$

تمـــاريـــن [3 – 3]

١- أوجد قيمة c التي تعينها مبرهنة رول في كل مما يأتي :

$a)\ f(x) = x^3 - 9x \qquad x \in [-3,3]$

١- الدالة مستمرة على [-3,3] لأنها كثيرة حدود.

٢- الدالة قابلة للاشتقاق على (-3,3) لأنها كثيرة حدود.

3) $f(a) = f(-3) = (-3)^3 - 9(-3) = -27 + 27 = 0$

$f(b) = f(3) = (3)^3 - 9(3) = 27 - 27 = 0$

$f(a) = f(b)$ ∴ الدالة تحقق مبرهنة رول

$f'(x) = 3x^2 - 9$

$f'(c) = 3c^2 - 9$

$3c^2 - 9 = 0 \Rightarrow 3c^2 = 9 \Rightarrow c^2 = 3 \Rightarrow c = \mp\sqrt{3}$

$c = \sqrt{3} \in (-3,3)$

$c = -\sqrt{3} \in (-3,3)$

b) $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$ $\quad x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

أوسع مجال للدالة $R \setminus \{0\}$

$\because 0 \notin \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

∴ ١) الدالة مستمرة على $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ لأنها معرفة ضمن مجالها .

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ لأنها معرفة ضمن مجالها.

3) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{\frac{1}{2}} = 1 + 4 = 5$

$f(2) = 2(2) + \frac{2}{2} = 4 + 1 = 5$

$f(a) = f(b)$ ∴ الدالة تحقق مبرهنة رول

$f(x) = 2x + 2x^{-1}$

$f'(x) = 2 - 2x^{-2} \Rightarrow 2 - \frac{2}{x^2}$

$f'(c) = 2 - \frac{2}{c^2}$

$2 - \frac{2}{c^2} = 0 \Rightarrow \frac{2}{c^2} = 2 \Rightarrow 2c^2 = 2 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \mp 1$

$c = 1 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

$c = -1 \notin \left(\frac{1}{2}, 2\right)$



c) $f(x) = (x^2 - 3)^2$ $\quad x \in [-1, 1]$

١) الدالة مستمرة على [-1,1] لأنها كثيرة حدود

٢) الدالة قابلة للاشتقاق على $(-1,1)$ لأنها كثيرة حدود.

3) $f(a) = f(-1) = ((-1)^2 - 3)^2 = (-2)^2 = 4$

$f(b) = f(1) = ((1)^2 - 3)^2 = (-2)^2 = 4$

$f(a) = f(b)$ ∴ الدالة تحقق مبرهنة رول

$f'(x) = 2(x^2 - 3)(2x)$

$f'(c) = 2(c^2 - 3)(2c)$

$(4c)(c^2 - 3) = 0 \Rightarrow$ أما $4c = 0 \Rightarrow c = 0 \in (-1,1)$

او $c^2 - 3 = 0 \Rightarrow c^2 = 3 \Rightarrow c = \mp\sqrt{3}$

$c = \sqrt{3} \notin (-1,1)$

$c = -\sqrt{3} \notin (-1,1)$

٢- جد تقريباً لكل مما يأتي باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

a) $\sqrt{63} + \sqrt[3]{63}$

$b = 63$
$a = 64$
$h = b - a$
$h = -1$

الدالة $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}$

$f(a) = f(64) = \sqrt{64} + \sqrt[3]{64} = 8 + 4 = 12$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(a) = f'(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}} = \frac{1}{2(8)} + \frac{1}{3(4)^2}$

$= \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{3+1}{48} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12} = 0.083$

$f(a+h) \cong f(a) + h\, f'(a)$

$f(64-1) \cong 12 + (-1)(0.083)$

$f(63) \cong 12 - 0.083$

$\sqrt{63} + \sqrt[3]{63} \cong 11.917$

b) $(1.04)^3 + 3\,(1.04)^4$

$f(x) = x^3 + 3x^4$

$f(a) = f(1) = (1)^3 + 3(1)^4 = 1 + 3 = 4$

$f'(x) = 3x^2 + 12x^3$

$f'(a) = f'(1) = 3(1)^2 + 12(1)^3 = 3 + 12 = 15$

$f(a+h) \cong f((a) + hf'(a)$

$f(1+0.04) \cong 4 + (0.04)(15)$

$f(1.04) \cong 4 + 0.6$

$(1.04)^3 + 3(1.04)^4 \cong 4.6$

$b = 1.04$
$a = 1$
$h = b - a = 0.04$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$

$f(a) = f(8) = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2} = 0.5$

$f'(x) = -\frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

$f'(a) = f'(8) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(8)^4}} = \frac{-1}{3(2)^4} = \frac{-1}{3(16)} = \frac{-1}{48} = -0.0208$

$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$

$f(8+1) \cong 0.5 + (1)(-0.0208)$

$f(9) \cong 0.5 - 0.0208$

$\frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cong 0.4792$

$b = 9$
$a = 8$ فقط العدد الحرج الذي تحت الجذر
$h = b - a = 1$

d) $\frac{1}{101}$

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f(a) = f(100) = \frac{1}{100} = 0.01$

$f'(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

$f'(a) = f'(100) = \frac{-1}{(100)^2} = \frac{-1}{10000} = -0.0001$

$f(a+h) \cong f(a) + h\, f'(a)$

$f(100+1) \cong 0.01 + (1)(-0.0001)$

$f(101) \cong 0.01 - 0.0001 \Rightarrow \frac{1}{101} \cong 0.0099$

$b = 101$

$a = 100$

$h = b - a = 1$



$e)\ \sqrt{\frac{1}{2}}$

يمكن كتابة السؤال بالصيغة العشرية $\sqrt{0.5}$ يجب مساواة المراتب مع دليل الجذر فتصبح $\sqrt{0.50}$

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$f(a) = f(0.49) = \sqrt{0.49} = 0.7$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(a) = f'(0.49) = \frac{1}{2\sqrt{0.49}} = \frac{1}{2(0.7)} = \frac{1}{1.4} = 0.714$

$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$

$f(0.49+0.01) \cong 0.7 + (0.01)(0.714)$

$f(0.50) \cong 0.7 + 0.00714$

$\sqrt{\frac{1}{2}} \cong 0.70714$

$b = 0.50$

$a = 0.49$

$h = b - a = 0.01$

٣- كرة نصف قطرها $(6cm)$ طليت بطلاء سمكه $(0.1cm)$ جد حجم الطلاء بالصورة التقريبية باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة.

نصف قطر الكرة بعد الطلاء هو $6 + 0.1 = 6.1\ cm$

∵ المطلوب في السؤال هو حجم الطلاء فقط ∴ يجب إيجاد مقدار التغير التقريبي لحجم الطلاء

$\therefore v(x) = \frac{4\pi}{3}x^3$ حجم الطلاء هو نفسه حجم الكرة

$v'(x) = \frac{4\pi}{3}(3x^2)$

$v'(x) = 4\pi x^2$

$v'(a) = v'(6) = 4\pi(6)^2 = 144\pi$

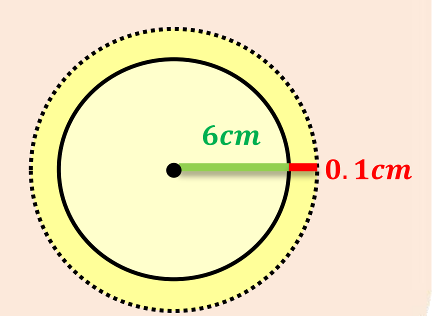
$hv'(6) \cong (0.1)(144\pi)$

$\cong 14.4\pi$ حجم الطلاء بصورة تقريبية

$b = 6.1$

$a = 6$

$h = b - a = 0.1$



٤- كرة حجمها $(84\pi\ cm^3)$ جد نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة.

نجد r من قانون حجم الكرة

$v(x) = \frac{4\pi}{3}r^3$

$84\pi = \frac{4\pi}{3}r^3] * 3$

$252\pi = 4\pi r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{252\pi}{4\pi}$

$\therefore r^3 = 63$

$\therefore r = \sqrt[3]{63}$

الآن نطبق نتيجة القيمة المتوسطة

$r(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$r(a) = r(64) = \sqrt[3]{64} = 4$

$r'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$r'(a) = r'(64) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}} = \frac{1}{3(4)^2} = \frac{1}{48} = 0.0208$

$b = 63$

$a = 64$

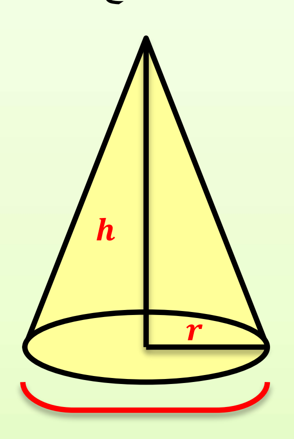
$h = b - a = -1$



$r(a+h) \cong r(a) + hr'(a)$
$r(64-1) \cong 4 + (-1)(0.0208)$
$r(63) \cong 4 - 0.0208$
$\sqrt[3]{63} \cong 3.9792$

٥- وزاري 2017 / مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته فإذا كان ارتفاعه يساوي $(2.98cm)$ فجد حجمه بصورة تقريبية باستخدام القيمة المتوسطة أو نتيجتها.

نفرض الارتفاع h وطول قطر القاعدة $2r$



$\therefore h = 2r$
$\therefore r = \frac{1}{2}h$ ....(1)
$v = \frac{\pi}{3}r^2h$ ....(2)
$v = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\,h\right)^2 h$ نعوض 1 في 2
$v = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{4}h^2\right)h \Rightarrow v = \frac{\pi}{12}h^3$
$v(x) = \frac{\pi}{12}x^3$
$v(a) = \frac{\pi}{12}(3)^3 = \frac{\pi}{12}(27) = \frac{9}{4}\pi = 2.25\pi$
$v'(x) = \frac{\pi}{12}(3x^2) \Rightarrow v'(x) = \frac{\pi}{4}x^2$
$v'(a) = \frac{\pi}{4}(3)^2 = \frac{9\,\pi}{4} = 2.25\,\pi$
$v(a+h) \simeq v(a) + hv'(a)$
$v(3-0.02) \simeq 2.25\,\pi + (-0.02)(2.25\,\pi)$
$v(2.98) \simeq 2.25\,\pi - 0.045\,\pi$
$\simeq 2.205\,\pi\ cm^3$

$b = 2.98$
$a = 3$
$h = -0.02$

٦- بين ان كل دالة من الدوال التالية تحقق مبرهنة رول على الفترة المعطاة إزاء كل منها ثم جد قيمة c

a) $f(x) = (x-1)^4$ $[-1,3]$

١- الدالة مستمرة على [-1,3] لأنها كثيرة حدود
٢- الدالة قابلة للاشتقاق على $(-1,3)$ لانها كثيرة حدود

3) $f(-1) = (-1-1)^4 = (-2)^4 = 16$
$f(3) = (3-1)^4 = (2)^4 = 16$
$\because f(-1) = f(3)$
$\therefore f(a) = f(b)$ ∴ الدالة تحقق مبرهنة رول
$f'(x) = 4(x-1)^3$
$f'(c) = 4(c-1)^3$, $f'(c) = 0$
$4\,(c-1)^3 = 0]\ \div 4$
$(c-1)^3 = 0$ بالجذر التكعيبي
$c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1 \in (-1,3)$

$b)\ \ h(x) = x^3 - x \qquad [-1, 1]$

١− الدالة مستمرة على $[-1,1]$ لأنها كثيرة حدود

٢− الدالة قابلة للاشتقاق على $(-1,1)$ لأنها كثيرة حدود

3) $h(-1) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$

$h(1) = (1)^3 - (1) = 1 - 1 = 0$

$h(-1) = h(1)$

$h(a) = h(b)$ ∴ الدالة تحقق مبرهنة رول

$h'(x) = 3x^2 - 1$

$h'(c) = 3c^2 - 1 \quad , \quad h'(c) = 0$

$3c^2 - 1 = 0$

$3c^2 = 1 \Longrightarrow c^2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow c = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$

$c = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1,1)$

$c = -\frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1,1)$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{1.7} = 0.588 < 1$

$\frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{1.7} = -0.588 > -1$

$c)\ \ g(x) = x^2 - 3x \qquad [-1, 4]$

١−الدالة مستمرة على $[-1,4]$ لأنها كثيرة حدود

٢− الدالة قابلة للاشتقاق على $(-1,4)$ لأنها كثيرة حدود

3) $g(-1) = (-1)^2 - 3(-1) = 4$

$g(4) = (4)^2 - 3(4) = 4$

$\because g(-1) = g(4)$

$\therefore g(a) = g(b)$ ∴ الدالة تحقق مبرهنة رول

$g'(x) = 2x - 3$

$g'(c) = 2c - 3$

$2c - 3 = 0 \Rightarrow 2c = 3 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \in (-1,4)$

$d)\ \ f(x) = \cos 2x + 2\cos x \qquad [0, 2\pi]$

١− الدالة مستمرة على $[0,2\pi]$ لأنها مجموع دالتين مستمرتين

٢− الدالة قابلة للاشتقاق على $(0,2\pi)$ لأنها مجموع دالتين قابلة للاشتقاق

3) $f(0) = \cos 2(0) + 2\cos(0) = \cos 0 + 2\cos 0 = 1 + 2(1) = 3$

$f(2\pi) = \cos 2(2\pi) + 2\cos(2\pi) = \cos 4\pi + 2\cos 2\pi = 1 + 2(1) = 1 + 2 = 3$

$\because f(0) = f(2\pi)$

$\therefore f(a) = f(b)$ ∴ الدالة تحقق مبرهنة رول.

$f'(x) = -\sin 2x(2) + 2(-\sin x) = -2\sin 2x - 2\sin x$

$f'(c) = -2\sin 2c - 2\sin c \Longrightarrow -2\sin 2c - 2\sin c = 0] \div -2$

$\sin 2c + \sin c = 0$ [لا يمكن الجمع لأن الزوايا مختلفة]

قانون ضعف الزاوية $\sin 2c = 2\sin c\cos c$

$2\sin c\cos c + \sin c = 0$

$\sin c\,[2\cos c + 1] = 0$

أما $\sin c = 0 \Rightarrow c = 0, \pi, 2\pi$

$c = 0 \notin (0,2\pi)\ ,\ c = \pi \in (0,2\pi)\ ,\ c = 2\pi \notin (0,2\pi)$

أو $2\cos c + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos c = -1 \Rightarrow \cos c = \frac{-1}{2}$

$\because \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\therefore \cos c = \cos\frac{\pi}{3}$ تكون cos سالبة في الربعين الثاني و الثالث

في الربع الثاني $c = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow c = \frac{2\pi}{3} \in (0,2\pi)$

في الربع الثالث $c = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow c = \frac{4\pi}{3} \in (0,2\pi)$

$\therefore$ قيم c هي $\left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$

٧- أختبر إمكانية تطبيق القيمة المتوسطة للدوال التالية على الفترة المعطاة إزاء ها مع ذكر السبب وان تحققت المبرهنة جد قيمة c الممكنة.

a) $\boldsymbol{f(x) = x^3 - x - 1 \qquad [-1,2]}$

١- الدالة مستمرة على $[-1,2]$ لأنها كثيرة حدود

٢- الدالة قابلة للاشتقاق على $(-1,2)$ لأنها كثيرة حدود

3) $f'(x) = 3x^2 - 1$

$f'(c) = 3c^2 - 1$ ميل المماس

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{5+1}{3} = \frac{6}{3} = 2$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$3c^2 - 1 = 2$

$3c^2 = 3 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \mp 1$

$c = 1 \in (-1,2)\,,\; c = -1 \notin (-1,2)$

b) $\boldsymbol{h(x) = x^2 - 4x + 5 \qquad [-1,5]}$

١- الدالة مستمرة على $[-1,5]$ لأنها كثيرة حدود

٢- الدالة قابلة للاشتقاق على $(-1,5)$ لأنها كثيرة حدود

3) $h'(x) = 2x - 4$

$h'(c) = 2c - 4$ ميل المماس

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(5)-f(-1)}{5-(-1)} = \frac{10-10}{6} = 0$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$2c - 4 = 0 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2 \in (-1,5)$

c) $\boldsymbol{g(x) = \frac{4}{x+2} \qquad [-1,2]}$

أوسع مجال للدالة هو $R \setminus \{-2\}$

$\therefore -2 \notin [-1,2]$

١- الدالة مستمرة على $[-1,2]$ لأنها معرفة كلياً ضمن مجالها

٢- الدالة قابلة للاشتقاق على $(-1,2)$ لأنها معرفة كلياً ضمن مجالها

3) $g(x) = 4(x+2)^{-1}$

$g'(x) = -4(x+2)^{-2}(1) = \frac{-4}{(x+2)^2}$

$g'(c) = \frac{-4}{(c+2)^2}$ ميل المماس

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{1-4}{3} = \frac{-3}{3} = -1$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$\frac{-4}{(c+2)^2} = -1 \Rightarrow [-(c+2)^2 = -4\,] * -1$

$(c+2)^2 = 4$ بالجذر التربيعي

$c+2 = \mp 2$

أما $c+2 = 2 \Rightarrow c = 0 \in (-1,2)$

أو $c+2 = -2 \Rightarrow c = -4 \notin (-1,2)$

$d)\ \boldsymbol{B(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}}$ $\boldsymbol{[-2,7]}$

أوسع مجال للدالة R

١- الدالة مستمرة على $[-2,7]$ لأنها معرفة كلياً ضمن مجالها.

٢- بحث قابلية الاشتقاق

اذا كانت الدالة جذرية ودليل الجذر عدد فردي فتكون الدالة مستمرة ونبحث قابلية الاشتقاق فقط وذلك باشتقاق الدالة من ثم تصفير المقام واستخراج القيم التي تجعل المقام مساويا للصفر من ثم مقارنتها مع فترة السؤال

$B(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$

$B'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{-1}{3}}$

$B'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$

$B'(c) = \frac{2}{3\sqrt[3]{c+1}}$

تكون الدالة غير معرفة عندما يكون المقام يساوي صفر وأن العدد (-1) يجعل المقام $= 0$

$\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x = -1$

$\because\ -1 \in (-2,7)$

$\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق على $(-2,7)$ لأنها غير معرفة ضمن مجالها.

$\therefore$ الدالة لا تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة إزاء الفترة المعطاة.

أسئلة التمارين العامة

س/ استخدم مبرهنة رول ثم مبرهنة القيمة المتوسطة لإيجاد قيم c للدالة

$\boldsymbol{f(x) = x^4 - 2x^2}$ $\boldsymbol{x \in [-2,2]}$

مبرهنة رول

١- الدالة مستمرة على $[-2,2]$ لأنها كثيرة حدود

٢- الدالة قابلة للاشتقاق على $(-2,2)$ لأنها كثيرة حدود.

3) $f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 = 16 - 8 = 8$

$f(2) = (2)^4 - 2(2)^2 = 16 - 8 = 8$

$f(-2) = f(2)$ الدالة تحقق مبرهنة رول

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f'(c) = 4c^3 - 4c$

$4c^3 - 4c = 0\ ]\ \div 4$

$c^3 - c = 0 \Longrightarrow c\,(c^2 - 1) = 0$

أما $c = 0\ \in (-2,2)$

أو $c^2 - 1 = 0\ \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \mp 1$

$c = 1 \in (-2,2)$

$C = -1\ \in (-2,2)$

$c = \{-1,0,1\}$

مبرهنة القيمة المتوسطة

١- الدالة مستمرة على $[-2,2]$ لأنها كثيرة حدود.

٢- الدالة قابلة للاشتقاق على $(-2,2)$ لأنها كثيرة حدود.

3) $f'(x) = 4x^3 - 4x$

$f'(c) = 4c^3 - 4c$ ميل المماس

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \frac{8-8}{4} = 0$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$4c^3 - 4c = 0\ ]\ \div 4$

$c^3 - c = 0$

$c\,(c^2 - 1) = 0$

أما $c = 0 \in (-2,2)$

او $c^2 - 1 = 0 \Longrightarrow c^2 = 1 \Longrightarrow c = \mp 1$

$c = 1\ \in (-2,2)$

$c = -1 \in (-2,2)$

$c = \{-1,0,1\}$

س/ $f(x) = ax^2 - 4x + 5$ دالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-1,b]$ فإذا كانت $c = 2$ تنتمي للفترة $(-1,b)$ فجد قيمة $a,b \in R$

∵ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول $\Longleftarrow$ $\acute{f}(c) = 0$

$f'(x) = 2a\,x - 4$

$f'(c) = 2ac - 4$

$\because c = 2$

$\therefore f'(2) = 2a(2) - 4$

$[0 = 4a - 4] \div 4$

$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

∵ الدالة تحقق شروط مبرهنة رول $\Longleftarrow$ $f(a) = f(b)$

[نعوض قيم (-1) و (b) و $a = 1$ في الدالة الأصلية]

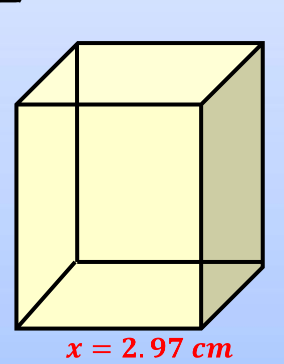
$f(-1) = f(b)$

$(1)(-1)^2 - 4(-1) + 5 = (1)b^2 - 4b + 5$
$1 + 4 + \cancel{5} = b^2 - 4b + \cancel{5}$
$5 = b^2 - 4b$
$b^2 - 4b - 5 = 0$
$(b-5)(b+1) = 0$
أما $b - 5 = 0 \Rightarrow b = 5$
او $b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$ يهمل ∵ الفترة هي$[-1, b]$ ∴ نختار قيمة $b > -1$
∴ الفترة هي $[-1,5]$

س/ متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاثة أمثال طول قاعدته ، جد الحجم التقريبي له عندما يكون طول قاعدته $(2.97cm)$.

نفرض طول ضلع القاعدة $= x$
الارتفاع $= 3x$
الحجم= v

حجم متوازي السطوح المستطيلة= مساحة القاعدة × الارتفاع

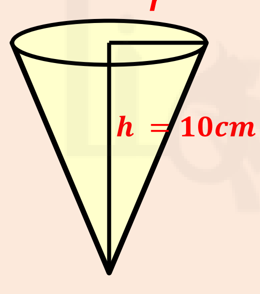


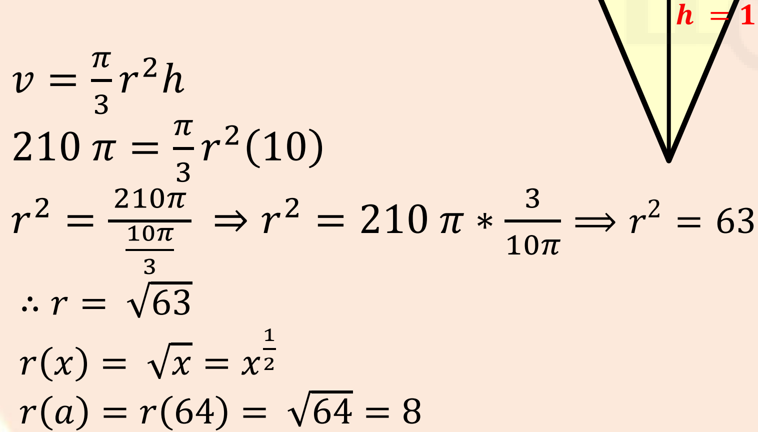
$b = 2.97$
$a = 3$
$h = b - a$
$h = -0.03$

$v(x) = (x^2)(3x)$
$v(x) = 3x^3$ الدالة
$v(a) = v(3) = 3(3)^3 = 3(27) = 81$
$v'(x) = 9x^2$
$v'(a) = v'(3) = 9(3)^2 = 9(9) = 81$
$v(a+h) \cong v(a) + h\, v'(a)$
$v(3 - 0.03) \cong 81 + (-0.03)(81)$
$v(2.97) \cong 81 - 2.43$
$\cong 78.57$

س/ مخروط دائري قائم حجمه $(210\pi\ cm^3)$ جد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته إذا كان ارتفاعه $(10\ cm)$

نفرض ارتفاع المخروط h
نصف قطر المخروط r
الحجم v





$v = \frac{\pi}{3} r^2 h$
$210\pi = \frac{\pi}{3} r^2 (10)$
$r^2 = \frac{210\pi}{\frac{10\pi}{3}} \Rightarrow r^2 = 210\pi * \frac{3}{10\pi} \Rightarrow r^2 = 63$
$\therefore r = \sqrt{63}$
$r(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$r(a) = r(64) = \sqrt{64} = 8$

$b = 63$
$a = 64$
$h = b - a = -1$

$r'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$r'(a) = r'(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{2(8)} = \frac{1}{16} = 0.0625$

$r(a+h) = r(a) + h\,r'(a)$

$r(64-1) = 8 + (-1)(0.0625)$

$r(63) = 8 - 0.0625$

$\sqrt{63} = 7.9375$

س/ إذا كانت $f(x) = \sqrt[5]{31x+1}$ جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة القيمة التقريبية إلى $f(1.01)$

$b = 1.01$

$a = 1$

$h = b - a = 0.01$

$f(x) = \sqrt[5]{31x+1} = (31x+1)^{\frac{1}{5}}$

$f(a) = f(1) = \sqrt[5]{31(1)+1} = \sqrt[5]{32} = 2$

$f'(x) = \frac{1}{5}(31x+1)^{\frac{-4}{5}}(31)$

$f'(x) = \frac{31}{5\sqrt[5]{(31x+1)^4}}$

$f'(a) = f'(1) = \frac{31}{5\sqrt[5]{(31(1)+1)^4}} = \frac{31}{5\left(\sqrt[5]{32}\right)^4} = \frac{31}{5(2)^4} = \frac{31}{5(16)} = \frac{31}{80} = 0.3875$

$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$

$f(1+0.01) \cong 2 + (0.01)(0.3875)$

$f(1.01) \cong 2 + 0.003875 \cong 2.003875$

أسئلة إثرائية

س/ باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد القيمة التقريبية للعدد $\sqrt[4]{(15)^{-1}}$

$b = 15$

$a = 16$

$h = b - a = -1$

$\sqrt[4]{(15)^{-1}} = \left(\sqrt[4]{15}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt[4]{15}}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = x^{\frac{-1}{4}}$

$f(a) = f(16) = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{2} = 0.5$

$f'(x) = \frac{-1}{4}x^{\frac{-5}{4}} = \frac{-1}{4\sqrt[4]{x^5}}$

$f'(a) = f'(16) = \frac{1}{4\left(\sqrt[4]{16}\right)^5} = \frac{1}{4(2)^5} = \frac{-1}{4(32)} = \frac{-1}{128} = -0.0078$

$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$

$f(16-1) \cong 0.5 + (-1)(-0.0078)$

$f(15) \cong 0.5 + 0.0078$

$\sqrt[4]{(15)^{-1}} \cong 0.5078$

س / هل أن $f(x)$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $[-4,5]$ وان تحققت جد قيمة c

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in[-4,2] \\ 4x-4 & x\in(2,5] \end{cases}$$

١- نبحث عن الاستمرارية عند الحد الفاصل $x=2$

1) $f(2)=(2)^2=4$

2) الغاية من اليمين $\lim_{x\to2} 4x-4=4(2)-4=8-4=4 \dots\dots\dots L1$

الغاية من اليسار $\lim_{x\to2} x^2=(2)^2=4 \dots\dots\dots\dots\dots L2$

$\because L_1=L_2 \Rightarrow$ توجد غاية عند $x=2$

3) $f(2)=\lim_{x\to2} f(x)$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x=2$ وعند $\{x: x>2\}$ وعند $\{x: x<2\}$

$\therefore$ الدالة مستمرة على $[-4,5]$

٢- نبحث قابلية الاشتقاق

$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$

$f'(2)=2(2)=4$ المشتقة من اليسار

$f(x)=4x-4 \Rightarrow f'(x)=4$

$f'(2)=4$ المشتقة من اليمين

$\therefore$ المشتقة من اليسار = المشتقة من اليمين $\therefore$ الدالة قابلة للاشتقاق على $(-4,5)$

٣- الشرط الثالث $f(a)=f(b)$

$f(-4)=(-4)^2=16$

$f(5)=4(5)-4=20-4=16$

$\because f(-4)=f(5)$

$\therefore f(a)=f(b) \Rightarrow$ الدالة تحقق مبرهنة رول

أما $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$

$f'(c)=2c \Rightarrow 2c=0 \Rightarrow c=0\in(-4,5)$

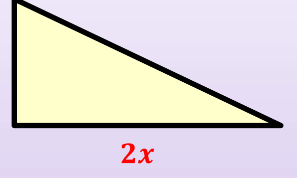
أو $f(x)=4x-4 \Rightarrow f'(x)=4 \Rightarrow f'(c)=4 \Rightarrow 4\neq0$ تهمل [غير ممكن]

س/ مثلث قائم الزاوية طول أحد ضلعيه القائمين ضعف القائمين الآخر جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة مساحته بصورة تقريبية إذا علمت ان طول ضلعه الصغير $(2.98\ cm)$

نفرض طول الضلع القائم الصغير x

نفرض طول الضلع القائم الكبير $2x$

نفرض مساحة المثلث A



مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

$A(x)=\frac{1}{2}(2x)(x)=x^2$

$A(a)=A(3)=(3)^2=9$

$A'(x)=2x$

$A'(a)=A'(3)=2(3)=6$

$b=2.98$
$a=3$
$h=-0.02$

$A\,(a+h) \cong A(a) + h\,A'(a)$
$A(3-0.02) \cong 9 + (-0.02)(6)$
$A(2.98) \cong 9 - 0.12$
$\cong 8.88$

اختبار التزايد والتناقص للدالة باستخدام المشتقة الأولى (نصف المنهج)

إن من النتائج المهمة لمبرهنة القيمة المتوسطة هي النتيجة الآتية:

لتكن f مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b) فإذا كانت

1) $f'(x) > 0, \forall\, x \in (a,b) \Rightarrow f$ {Increasing متزايدة}

2) $f'(x) < 0, \forall \in (a,b) \Rightarrow f$ {**Decreasing** متناقصة}

خطوات إيجاد مناطق التزايد والتناقص

١- نشتق الدالة أي نجد $f'(x)$

٢- نساوي المشتقة للصفر $f'(x) = 0$ ونجد قيم x

٣- نختبر قيم x التي حصلنا عليها من الخطوة الثانية على خط الاعداد ونبحث إشارة $f'(x)$

٤- تكون المناطق الموجبة هي مناطق التزايد والمناطق السالبة هي مناطق التناقص.

وحسب الأمثل الآتية:

مثال لتكن $y = f(x) = x^2$ **جد مناطق التزايد والتناقص.**

١- نجد المشتقة

$f'(x) = 2x$

٢- نساوي المشتقة للصفر ونجد قيم x

$f'(x) = 0$

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$

٣- نختبر قيم x على خط الأعداد

$X < 0$ 0 $x > 0$
- - - - - - - - - - - ++++++++++
اشارة $f'(x)$

$x > 0$ نأخذ أي قيمة أكبر من الصفر وليكن مثلاً (1)
ونعوضها في $f'(x)$ من ثم نأخذ إشارة العدد الناتج فقط

$f'(1) = 2(1) = 2$ (موجبة)

$x < 0$ نأخذ أي قيمة أصغر من الصفر وليكن مثلاً (-1) ونعوضها أيضاً في $f'(x)$ ونستفاد فقط من اشارتها

$f'(-1) = 2(-1) = -2$ (سالبة)

٤- نجد مناطق التزايد والتناقص

حيث المنطقة الموجبة تكون منطقة تزايد نضع لها سهم إلى الأعلى والمنطقة السالبة تكون منطقة تناقص ونضع لها سهم إلى الأسفل

∴ منطقة التزايد $\{x : x > 0\}$

منطقة التناقص $\{x : x < 0\}$

مثال جد مناطق التزايد والتناقص لكل من الدالتين الآتيتين

$a)\ f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$

$f'(x) = 9 + 6x - 3x^2$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 9 + 6x - 3x^2 = 0] \div 3$

$3 + 2x - x^2 = 0$

$(3 - x)(1 + x) = 0$

أما $3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$

أو $1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$

$X < -1$ ‏ ‏ $(-1, 3)$ ‏ ‏ $x > 3$

‏- - - - - - - - - ‏ ‏ ++++++ ‏ ‏ - - - - - - - - - -

-1 ‏ ‏ 3 ‏ ‏ اشارة $\acute{f}(x)$

نختبر $x = -1$, $x = 3$ على خط الأعداد لنجد إشارة المشتقة الأولى وذلك بالتعويض لقيم مجاورة للعددين

مناطق التزايد : $(-1,3)$

مناطق التناقص : $\{x: x < -1\},\ \{x: x > 3\}$

$b)\ f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow 2 = 0$ وهذا غير ممكن

$\therefore$ $f'(x)$ غير معرفة إذا كانت $x = 0$ أي أن $x = 0$ عدد حرج

$\therefore$ نبحث إشارة $f'(x)$ عند العدد الحرج وذلك لعدم وجود قيمة صريحة لـ x

مناطق التزايد $\{x: x > 0\}$

مناطق التناقص $\{x: x < 0\}$



ملاحظة: بما أن الدالة او المشتقة غير معرفة عند عدد معين نضع فجوة عند ذلك العدد على خط الأعداد ونكمل باقي الحل كما في الأمثلة السابقة

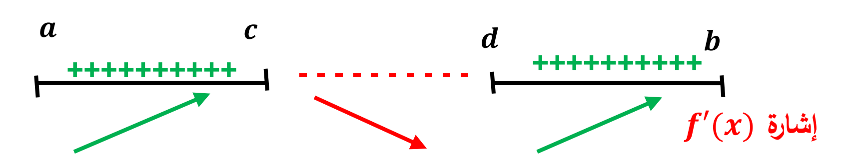
النهاية العظمى والصغرى المحلية

لاحظ في الشكل أدناه ان الدالة $y = f(x)$ متزايدة على الفترة (a, c) لأن $f'(x) > 0$ ومتناقصة على الفترة (c, d) لأن $f'(x) < 0$ ثم تتزايد في الفترة (d, b)

كما إن $f' = 0$ عند كل من $x = a, x = b, x = c, x = d$

تسمى نقطة $(c, f(c))$ نقطة نهاية عظمى محلية وإن $f(c)$ هي النهاية العظمى المحلية (***Local Maximam***)

وتدعى النقطة $(d, f(d))$ نقطة نهاية صغرى محلية وإن $f(d)$ هي النهاية الصغرى المحلية (***Local Minimam***).



تعريف: لتكن f دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق عند $x=c$ التي تنتمي إلى الفترة المفتوحة (a,b) فإذا كانت

1) $f'(c) < 0 \,;\forall x \in (c,b)$
$f'(c) > 0 \,;\, \forall x \in (a,c)$
$f'(c) = 0$
فإن $f(c)$ نهاية عظمى محلية

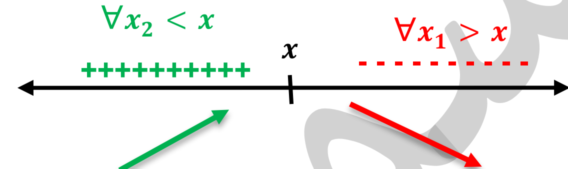
2) $f'(c) > 0 \,;\, \forall\, x \in (c,b)$
$f'(c) < 0 \,;\, \forall\, x \in (a,c)$
$f'(c) = 0$
فإن $f(c)$ نهاية صغرى محلية.

ملاحظة **لاختبار القيمة العظمى والصغرى للدالة f بواسطة المشتقة الأولى للدالة نتبع الآتي :**

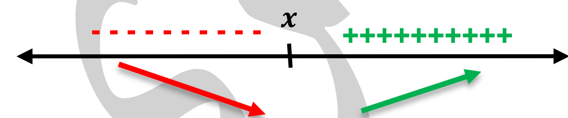
١- نجد الأعداد الحرجة: وذلك باشتقاق الدالة ومساواتها للصفر واستخراج قيم x ومن ثم إيجاد صورة x وذلك بتعويضها في الدالة الأصلية فتكون لدينا نقطة حرجة من الصيغة $(x, f(x))$

٢- نختبر إشارة $f'(x)$ وذلك بجوار العدد x من اليمين واليسار.

- فإذا كانت إشارة $f'(x)$ موجبة من اليسار وسالبة من اليمين فهذا يعني ان النقطة $(x, f(x))$ هي نقطة نهاية عظمى محلية.



- وإذا كانت إشارة $f'(x)$ موجبة من اليمين وسالبة من اليسار فهذا يعني ان النقطة $(x, f(x))$ نقطة نهاية صغرى محلية



- أما إذا كانت إشارة $f'(x)$ لا تتغير من اليمين واليسار فلا يوجد للدالة نهاية عظمى او صغرى محلية عند تلك النقطة.

مثال **جد نقط النهايات العظمى والصغرى المحلية للدالة f في حالة وجودها إذا علمت ان**

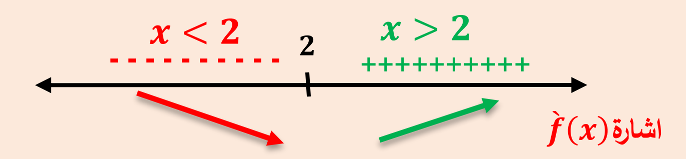
$a)\ f(x) = 1 + (x-2)^2$

$f'(x) = 2\,(x-2)$
$f'(x) = 0$
$2(x-2) = 0] \div 2$
$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

نعوض في الدالة الاصلية لنجد قيمة y $y = f(2) = 1 + (2-2)^2 = 1$

نقطة حرجة $(2,1)$

نبحث إشارة $f'(x)$ لقيمة x فقط



مناطق التزايد $\{x : x > 2\}$

مناطق التناقص $\{x : x < 2\}$

∴ النقطة $(1,2)$ تمثل نقطة نهاية صغرى محلية

b) $f(x) = 1 - (x-2)^2$

$f'(x) = -2(x-2)$

$f'(x) = 0$

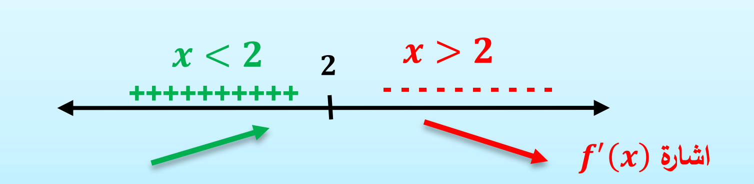
$-2(x-2) = 0] \div -2$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$y = f(2) = 1 - (2-2)^2$

$y = 1$

∴ $(2,1)$ نقطة حرجة



مناطق التزايد $\{x : x < 2\}$ ، مناطق التناقص $\{x : x > 2\}$ ، $(2,1)$ نقطة نهاية عظمى محلية

c) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

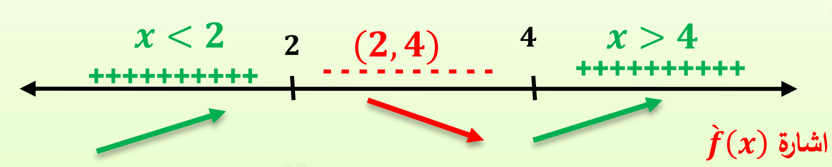
$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 18x + 24 = 0] \div 3$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x-4)(x-2) = 0$



أما $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 16 \Rightarrow (4,16)$ نقطة حرجة

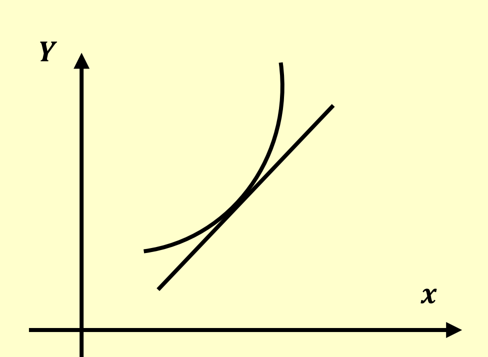
او $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 20 \Longrightarrow (2,20)$ نقطة حرجة

مناطق التزايد $\{x : x > 4\}, \{x : x < 2\}$ ، مناطق التناقص $(2,4)$

$(2,20)$ نقطة نهاية عظمى محلية ، $(4,16)$ نقطة نهاية صغرى محلية

تقعر وتحدب المنحنيات ونقط الانقلاب

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b) فيقال عن الدالة f بأنها محدبة إذا كانت $\acute{f}$ متناقصة خلال تلك الفترة وتسمى مقعرة إذا كانت $\acute{f}$ متزايدة خلال تلك الفترة.



منحني مقعر والمشتقة متزايدة (A)

منحني محدب والمشتقة متناقصة (B)

ملاحظة: المنحني مقعر في (a,b) (concave Up) ⟸ المنحني يقع فوق جميع مماساته في (a,b)

والمنحني محدب في (a,b) (concave down) ⟸ المنحني يقع تحت جميع مماسته في (a,b) لاحظ الشكلين (B), (A)

مبرهنة : إذا كانت f معرفة في $[a,b]$ ولها مشتقة أولى وثانية على (a,b) فإنها تكون مقعرة على (a,b) إذا حققت الشرط الآتي: $f''(x) > 0$ لكل $x \in (a,b)$

تكون محدبة على (a,b) إذا حققت الشرط الآتي: $f''(x) < 0$ لكل $x \in (a,b)$

خطوات إيجاد مناطق التحدب والتقعر ونقط الانقلاب:

١- نجد المشتقة الثانية ونجعلها مساوية للصفر (إن أمكن) ونجد قيم x

٢- نعوض قيم x في الدالة الأصلية وذلك لاستخراج $f(x)$ ومنها تتكون نقطة $(x, f(x))$ وتسمى نقطة مرشحة للانقلاب.

٣- نبحث إشارة $f''(x)$ وذلك باختبار القيم الاكبر والاصغر من x

- **اذا كانت اشارة $f''(x)$ موجبة فتكون منطقة تقعر.**
- **إذا كانت إشارة $f''(x)$ سالبة فتكون منطقة تحدب.**

ملاحظة : إذا كان الاختبار ينقلب من التحدب إلى التقعر او العكس فهذا يعني ان النقطة $(x, f(x))$ هي نقطة انقلاب

مثال أدرس تقعر وتحدب كل من الدالتين :

$a)\ f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$ نجد المشتقة الثانية

$f''(x) = 2$

$f''(x) = 0$

$2 \neq 0$ لا يمكننا مساواة المشتقة الثانية للصفر لأنها عدد ثابت

∴ مباشرة نأخذ إشارة المشتقة الثانية . $f''(x) = 2 > 0$ (موجبة)

∴ تكون الدالة مقعرة دائماً، ولا توجد نقط انقلاب.

ملاحظة : في حالة عدم مساواة المشتقة الثانية للصفر ويكون ناتج المشتقة الثانية عدد ثابت إذن نأخذ إشارة ذلك العدد فإذا كان موجب فتكون الدالة مقعرة دائماً ولا توجد نقاط انقلاب.
وإذا كان سالب فتكون الدالة محدبة دائماً ولا توجد نقط انقلاب.

$\boldsymbol{b\ )\ f(x) = x^3}$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

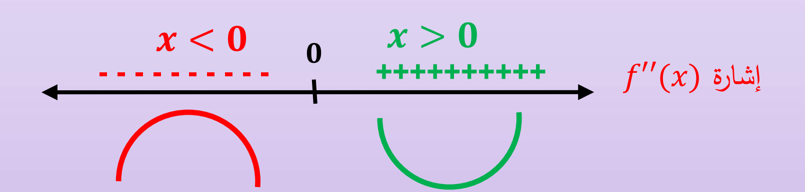
$f''(x) = 0$

$\therefore 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ نعوض قيمة x في الدالة الأصلية

$y = f(0) = (0)^3 \Rightarrow y = 0$

$\therefore (0,0)$ نقطة مرشحة للانقلاب

نبحث إشارة $f''(x)$ لقيم x فقط.



مناطق التقعر $\{x: x > 0\}$ ، مناطق التحدب $\{x: x < 0\}$

$(0,0)$ نقطة انقلاب [وذلك لان الشكل تغير من تحدب إلى تقعر أو العكس]

مثال جد نقط الانقلاب للمنحني $\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1}$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f''(x) = 12x - 6 \quad , \ f''(x) = 0$

$12x - 6 = 0 \Rightarrow 12x = 6 \Longrightarrow x = \dfrac{6}{12} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$y = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 12\left(\dfrac{1}{2}\right) + 1 \Longrightarrow y = \dfrac{-11}{2}$

$\Rightarrow (x, y) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-11}{2}\right)$ نقطة مرشحة للانقلاب

$x < \dfrac{1}{2}$ $\dfrac{1}{2}$ $x > \dfrac{1}{2}$

- - - - - - - - - - -   ++++++++++

إشارة $f''(x)$

مناطق التقعر $\left\{x: x > \frac{1}{2}\right\}$ ، مناطق التحدب $\left\{x: x < \frac{1}{2}\right\}$ ، $\left(\frac{1}{2}, \frac{-11}{2}\right)$ نقطة انقلاب

مثال جد مناطق التحدب والتقعر ونقاط الانقلاب إن وجدت للدوال التالية:

$\boldsymbol{a\ )\ f(x) = 4x^3 - x^4}$

$f'(x) = 12x^2 - 4x^3$

$f''(x) = 24x - 12x^2$

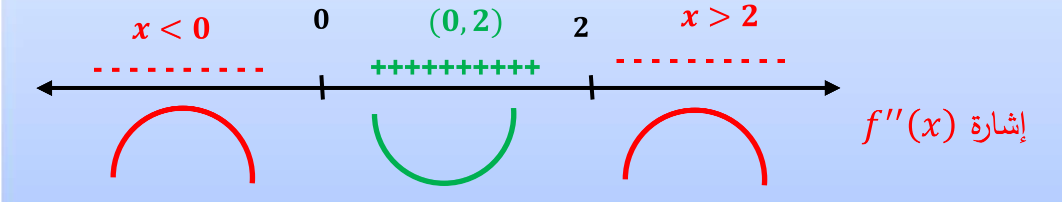
$24x - 12x^2 = 0\ ] \div 12$

$2x - x^2 = 0$

$x(2-x)=0$

أما $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (0,0)$ نقطة مرشحة للانقلاب

أو $2-x=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=16 \Rightarrow (2,16)$ نقطة مرشحة للانقلاب



إشارة $f''(x)$

مناطق التحدب $\{x: x<0\}, \{x: x>2\}$ ، مناطق التقعر $(0,2)$ ، $(0,0)$ $(2,16)$ نقاط انقلاب

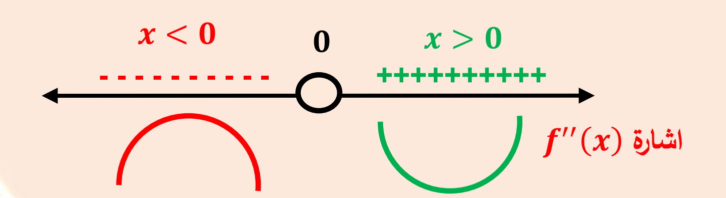
b) $f(x)=x+\frac{1}{x} \quad , \quad x \neq 0$

أوسع مجال للدالة $R \setminus \{0\}$ لأن الدالة كسرية

$f(x)=x+x^{-1}$
$f'(x)=1-x^{-2}$
$f''(x)=2x^{-3}$
$f''(x)=\frac{2}{x^3}$
$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{2}{x^3}=0 \Rightarrow 2=0$ [وهذا غير ممكن]

$\therefore f''(x)$ غير معرفة عند $x=0$

$\therefore$ نضع فجوة عند $x=0$ عند الاختبار على خط الاعداد ونختبر القيم الأكبر والأصغر من (0)



اشارة $f''(x)$

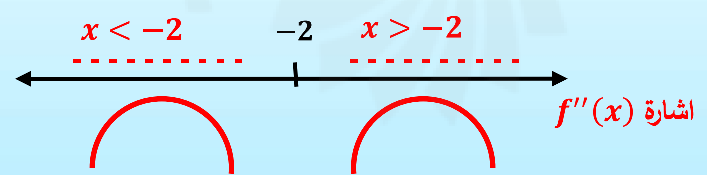
مناطق التحدب $\{x: x<0\}$

مناطق التقعر $\{x: x>0\}$

لا توجد نقاط انقلاب لأن 0 لا ينتمي إلى المجال.

c) $h(x)=4-(x+2)^4$

$h'(x)=-4(x+2)^3$
$h''(x)=-12(x+2)^2 \quad , \quad h''(x)=0$
$-12(x+2)^2=0] \div -12$
$(x+2)^2=0$ بالجذر التربيعي
$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow y=4$
$(-2,4)$ نقطة مرشحة للانقلاب



اشارة $f''(x)$

مناطق التحدب $\{x: x<-2\}, \{x: x>-2\}$

لا توجد نقط انقلاب [وذلك لأن لا يوجد تغير في شكل المنحني]

$d)\ f(x) = 3 - 2x - x^2$

$f'(x) = -2 - 2x$

$f''(x) = -2 < 0$ ∴ الدالة محدبة دائماً ولا توجد نقاط انقلاب

$e)\ f(x) = x^4 + 3x^2 - 3$

$f'(x) = 4x^3 + 6x$

$f''(x) = 12x^2 + 6 \quad , \quad f''(x) = 0$

$12x^2 + 6 = 0 \Rightarrow 12x^2 = -6$

$x^2 = \frac{-1}{2} \quad \notin R$ [هذا غير ممكن]

وذلك لأنه لا يوجد عدد مربعه يساوي عدد سالب.

∴ نرجع إلى إشارة المشتقة الثانية $f''(x) = 12x^2 + 6 > 0$

∴ الدالة مقعرة في R ولا توجد نقاط انقلاب.

اختبار المشتقة الثانية لنقط النهايات العظمى والصغرى المحلية

بدلاً من ملاحظة كيفية تغير إشارة f' عند المرور بالنقطة الحرجة حيث $f'(x) = 0$ فإنه بإمكاننا استخدام الاختبار التالي لنقرر فيما إذا كانت النقطة الحرجة تمثل نقطة نهاية عظمى أو نهاية صغرى محلية، وذلك باستخدام اختبار المشتقة الثانية وكما يأتي:

١- إذا كان $f'(c) = 0$ وإن $f''(c) < 0$ فإن f تمتلك نهاية عظمى محلية عند $x = c$

٢- إذا كان $f'(c) = 0$ وإن $f''(c) > 0$ فإن f تمتلك نهاية صغرى محلية عند $x = c$

٣- إذا كانت $f''(c) = 0$ أو $f''(c)$ غير معرفة فلا يصح هذا الاختبار.

يمكننا استخدام المشتقة الثانية في إيجاد نقط النهايات العظمى والصغرى وذلك بإتباع الآتي:

١- نجد المشتقة الأولى.

٢- نساوي المشتقة الأولى للصفر ونجد قيم x

٣- نجد المشتقة الثانية من ثم نعوض قيم xالتي حصلنا عليها من الخطوة السابقة في المشتقة الثانية.

- فإذا كانت $f''(x) > 0$ فإنها تمثل نقطة نهاية صغرى محلية.
- إذا كانت $f''(x) < 0$ فإنها تمثل نقطة نهاية عظمى محلية.
- إذا كانت $f''(x) = 0$ فتعتبر هذه الطريقة فاشلة ونتبع طريقة المشتقة الأولى (الاختبار على خط الأعداد).

مثال **باستخدام المشتقة الثانية ان أمكن جد النهايات المحلية للدوال التالية:**

$a)\ f(x) = 6x - 3x^2 - 1$

$f'(x) = 6 - 6x$

$f'(x) = 0$

$6 - 6x = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Longrightarrow x = 1$

$f''(x) = -6$

$f''(1) = -6 < 0$

∵ $f'(1) = 0, f''(1) < 0$ إذاً توجد نهاية عظمى محلية عند $x = 1$

$f(1) = 6(1) - 3(1)^2 - 1 = 2$

$\therefore$ $(1,2)$ نقطة نهاية عظمى محلية.

نعوض في الدالة الأصلية قيمة x لإيجاد قيمة y

b) $\boldsymbol{f(x) = x - \frac{4}{x^2} \quad , \quad x \neq 0}$

$f(x) = x - 4x^{-2}$

$f'(x) = 1 + 8x^{-3}$

$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3} \quad , \quad f'(x) = 0$

$1 + \frac{8}{x^3} = 0 \Rightarrow \frac{8}{x^3} = -1 \Rightarrow -x^3 = 8 \Longrightarrow x^3 = -8$ بالجذر التكعيبي

$\therefore x = -2$

$f(-2) = (-2) - \frac{4}{(-2)^2} = -2 - 1 = -3$

$\therefore$ $(-2,-3)$ نقطة حرجة

$f''(x) = -24x^{-4}$

$f''(x) = \frac{-24}{x^4}$

$f''(x) = \frac{-24}{(-2)^4} = \frac{-24}{16} = \frac{-3}{2} < 0$

$\because f''(-2) < 0, f'(-2) = 0$

$\therefore$ توجد نهاية عظمى محلية عند النقطة $(-2,-3)$

c) $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 6x - 9 = 0] \div 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = -27 \Rightarrow (3,-27)$ نقطة حرجة

أو $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow (-1,5)$ نقطة حرجة

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(3) = 6(3) - 6 = 18 - 6 = 12 > 0$

$\therefore$ توجد نهاية صغرى محلية عند النقطة $(3,-27)$.

$f''(-1) = 6(-1) - 6 = -6 - 6 = -12 < 0$

$\therefore$ توجد نهاية عظمى محلية عند النقطة $(-1,5)$.

d) $\boldsymbol{f(x) = 4 - (x + 1)^4}$

$f'(x) = -4(x + 1)^3 \quad , \quad f'(x) = 0$

$-4(x + 1)^3 = 0\,] \div -4$

$(x + 1)^3 = 0$ بالجذر التكعيبي

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (-1,4)$ نقطة حرجة

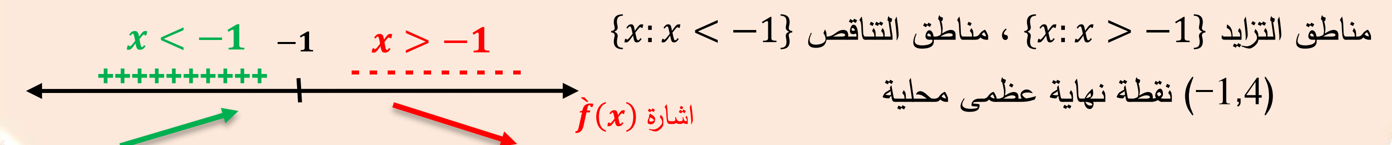
$f''(x) = -12(x + 1)^2$

$f''(-1) = -12(-1+1)^2 = -12(0) = 0$

∴ هذه الطريقة لا تصح لأن الناتج صفر إذن نعود إلى طريقة بحث إشارة المشتقة الأولى على خط الأعداد

مناطق التزايد $\{x: x > -1\}$ ، مناطق التناقص $\{x: x < -1\}$

$(-1,4)$ نقطة نهاية عظمى محلية



الخلاصة

من المشتقة الأولى نستطيع ايجاد:

١- النقاط الحرجة.

٢- مناطق التزايد والتناقص

٣- النهايات العظمى والصغرى.

من المشتقة الثانية تستطيع ايجاد:

١- مناطق التقعر والتحدب.

٢- نقاط الانقلاب.

إيجـاد قـيـم الـثـوابـت

ملاحظات مهمة جداً

- كل نقطة (x, y) تنتمي للمنحني تحقق معادلة المنحني .
- إذا كان المنحني يملك نقطة حرجة أو نهاية عظمى أو صغرى محلية فهذه النقطة نستعملها مرتين.

١- نقطة ∋ للمنحني إذن تحقق معادلة المنحني.

٢- $f'(x) = 0$ عند قيمة x المعطاة في النقطة.

- إذا كان المنحني يملك نقطة انقلاب فتستعمل استعمالين

١- نقطة ∋ للمنحني ∴ تحقق معادلة المنحني.

٢- $f''(x) = 0$ عند قيمة x المعطاة في النقطة.

- عندما يعطينا في السؤال ان الدالة تملك نهاية عظمى أو صغرى محلية قيمتها عدد معين فإن هذا العدد يمثل قيمة y وليس x
- عندما المنحني يمس المستقيم في نقطة مثل (x, y) فذلك يعني ان ميل المنحني عند قيمة x يساوي ميل المستقيم.

حيث ان (ميل المنحني هو المشتقة الأولى عند نقطة التماس)

(ميل المستقيم = $\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$)



- عندما يكون المنحني $f(x)$ يمس المنحني $g(x)$ عند نقطة التماس (x,y)

$\therefore$ ميل $f(x) =$ ميل $g(x) \Leftarrow g'(x) = f'(x)$ عند (x,y)

مثال لتكن $x \neq 0$, $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ جد قيمة a حيث $a \in R$ علماً أن الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x = 1$ ثم بين ان الدالة f لا تملك نهاية عظمى محلية.

$\because$ الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x = 1$

$\therefore f''(x) = 0$ عند $x = 1$

$f(x) = x^2 + ax^{-1}$

$f'(x) = 2x - ax^{-2}$

$f''(x) = 2 + 2a\,x^{-3}$

$f''(x) = 2 + \frac{2a}{x^3}$, $f''(x) = 0$

$2 + \frac{2a}{x^3} = 0$ [نعوض $x = 1$]

$2 + \frac{2a}{(1)^3} = 0$

$2 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$

$\therefore f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

يمكن إيجاد النهايات بطريقتين : بطريقة الاختبار بالمشتقة الثانية أو الاختبار على خط الاعداد

سنجدها باستخدام المشتقة الثانية

$f(x) = x^2 - x^{-1}$

$f'(x) = 2x + x^{-2}$

$f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0$

$2x + \frac{1}{x^2} = 0 \;] * x^2$

$2x^3 + 1 = 0 \Rightarrow 2x^3 = -1 \Rightarrow x^3 = \frac{-1}{2}$ بالجذر التكعيبي للطرفين

$x = \sqrt[3]{\frac{-1}{2}} \Rightarrow x = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}}$

$f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$

$f''\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 2 - \frac{2}{\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3} = 2 - \frac{2}{-\frac{1}{2}} = 2 + 4 = 6 > 0$

$\therefore$ توجد نهاية صغرى محلية عند $x = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}}$ $\therefore$ الدالة لا تمتلك نهاية عظمى محلية

مثال عين قيمتي الثابتين a, b لكي يكون لمنحني الدالة $y = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $x = -1$ ونهاية صغرى محلية عند $x = 2$ ثم جد نقطة الانقلاب:

$\because$ للدالة نهاية عظمى محلية عند $x = -1$

$\therefore f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(-1) = 3(-1)^2 + 2a(-1) + b$

$3-2a+b=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$\because$ للدالة نهاية صغرى محلية عند $x=2$

$\therefore f'(2)=0$

$f'(2)=3(2)^2+2a(2)+b$ نعوض $x=2$ في المشتقة الأولى

$12+4a+b=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$3-2a+b=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$\mp 12 \mp 4a \mp b = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$ بالطرح

$-9-6a=0$

$6a=-9 \Rightarrow a=\frac{-9}{6} \Rightarrow a=\frac{-3}{2}$ نعوض في (1)

$3-2\left(\frac{-3}{2}\right)+b=0$

$3+3+b=0 \Rightarrow 6+b=0 \Rightarrow b=-6$

لإيجاد نقاط الانقلاب نساوي المشتقة الثانية للصفر $f''(x)=0$

نعوض قيم a,b التي استخرجناها في الدالة الأصلية من ثم نشتق المشتقة الثانية.

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x$

$f'(x)=3x^2-3x-6$

$f''(x)=6x-3$

$6x-3=0 \Rightarrow 6x=3 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$x<\frac{1}{2}$ - - - - - - - - - - $\frac{1}{2}$ ++++++++++ $x>\frac{1}{2}$ إشارة $f''(x)$

مناطق التحدب $\left\{x: x<\frac{1}{2}\right\}$ ، مناطق التقعر $\left\{x: x>\frac{1}{2}\right\}$

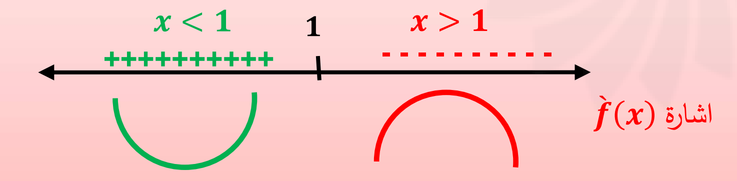
$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2-6\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-13}{4}$

$\therefore \left(\frac{1}{2},\frac{-13}{4}\right)$ هي نقطة انقلاب.

مثال

إذا كان منحني الدالة $f(x)=ax^3+bx^2+c$ مقعر في $\{x: x<1\}$ ومحدب في $\{x: x>1\}$ ويمس المستقيم $y+9x=28$ عند النقطة $(3,1)$ فجد قيم الأعداد الحقيقية a,b,c

$\because$ المنحني مقعر في $\{x: x<1\}$ ومحدب في $\{x: x>1\}$ $\therefore$ المنحني يملك نقطة انقلاب عند $x=1$



$\therefore f''(1)=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx$

$f''(x)=6ax+2b$

$f''(1)=6a(1)+2b$

$6a+2b=0 \;\;]\div 2$

$3a+b=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

∵ المنحني يمس المستقيم $y+9x=28$ عند النقطة $(3,1)$
∴ ميل المنحني عند $(x=3)$ يساوي ميل المستقيم

$f'(x)=3ax^2+2bx$
$f'(3)=3a(3)^2+2b(3)$
$f'(3)=27a+6b$ ميل المنحني

ميل المستقيم = $\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$ ⟸ $m=\frac{-9}{1} \Rightarrow m=-9$

$\therefore f'(3)=m$
$\therefore\ 27a+6b=-9\ ]\div 3$
$9a+2b=-3 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

نحل المعادلتين 1 و 2 بالحذف

$3a+b=0 \ldots\ldots\ldots(1)\quad]\ *2$
$9a+2b=-3\ \ldots\ldots\ldots(2)$

$$\left.\begin{aligned}6a+2b&=0\\ \mp 9a\mp 2b&=\pm 3\end{aligned}\right\}$$ بالطرح

$-3a=3 \Rightarrow a=-1$ نعوض في (1)
$3(-1)+b=0 \Rightarrow -3+b=0 \Rightarrow b=3$

∵ $(3,1)$ نقطة ∈ للمنحني ∴ تحقق المعادلة المنحني $f(x)=ax^3+bx^2+c$
نعوض $a=-1$, $b=3$, $x=3,$ $y=1$ في الدالة لايجاد قيمة c

$1=(-1)(3)^3+(3)(3)^2+2$
$1=-27+27+c$
$\therefore c=1$

مثال **إذا كان للدالة $f(x)=ax^3+3x^2+c$ نهاية عظمى محلية تساوي 8 ، ونقطة انقلاب عند $x=1$ فجد قيمة $a,c\in R$**

∵ الدالة تملك نقطة انقلاب عند $x=1$

$\therefore f''(1)=0$
$f'(x)=3ax^2+6x$
$f''(x)=6ax+6$
$f''(1)=6a(1)+6\ ,\ f''(1)=0$
$6a+6=0 \Rightarrow 6a=-6 \Rightarrow a=-1$
$f(x)=-x^3+3x^2+c$ بالتعويض في الدالة

∵ للدالة نهاية عظمى محلية تساوي 8 ⟸ $f'(x)=0, y=8$

$f'(x)=-3x^2+6x$
$f'(x)=0$
$-3x^2+6x=0\ ]\div -3$
$x^2-2x=0$

عندما تكون النهاية او نقطة الانقلاب تساوي عدد
او قيمتها عدد معين هذا معناه قيمه y وليس x

$x(x-2)=0$

أما $x=0$

أو $x-2=0 \Rightarrow x=2$

إشارة $f'(x)$

$x<0$ ----------- 0 $(0,2)$ ++++++++++ 2 $x>2$ -----------

مناطق التزايد $(0,2)$ ، مناطق التناقص $\{x:x>2\},\{x:x<0\}$

$\therefore$ الدالة تمتلك نهاية عظمى محلية عند $x=2$ $\Leftarrow$ $(2,8)$ نقطة $\ni$ للمنحني اذن تحقق المعادلة

$f(x)=-x^3+3x^2+c$

$8=-(2)^3+3(2)^2+c$

$8=-8+12+c$

$8=4+c \Rightarrow c=4$

تمارين $[3-4]$

١- لتكن $f(x)=ax^2-6x+b$ حيث ان $b\in R$ ، $a\in\{-4,8\}$ جد قيمة a إذا كان

أ – الدالة محدبة. ب– الدالة مقعرة

أ– $\because$ الدالة محدبة

$\therefore f''(x)<0$

$f'(x)=2ax-6$

$f''(x)=2a<0$

تكون $f''(x)$ سالبة عندما $a=-4$ $\therefore a=-4$

ب–$\because$ الدالة مقعرة

$\therefore f''(x)>0$

$f'(x)=2ax-6$

$f''(x)=2a>0$

تكون $f''(x)$ موجبة عندما $a=8$ $\therefore a=8$

٢- إذا كانت $(2,6)$ نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x)=a-(x-b)^4$ فجد قيمة $a,b\in R$ وبين نوع النقطة الحرجة.

$\because$ الدالة تملك نقطة حرجة هي $(2,6)$ $\therefore$ نستفاد من النقطة $(2,6)$ كنقطة $\ni$ للدالة اذن تحقق المعادلة وايضا المشتقة الاولى تساوي صفر عند $x=2$

$\because$الدالة تملك نقطة حرجة $\therefore f'(x)=0$

$f'(x)=-4(x-b)^3$

عندما $x=2 \Rightarrow f'(2)=-4(2-b)^3$

$f'(2)=0 \Rightarrow -4(2-b)^3=0]\div -4$

$(2-b)^3=0$ بالجذر التكعيبي

$2-b=0$

$b=2$

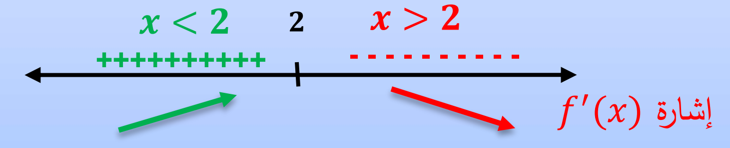
نعوض قيمة $b = 2$ في الدالة الأصلية $f(x) = a - (x-2)^4 \dots\dots(1)$

$\because (2,6)$ نقطة تنتمي للدالة $\therefore$ تحقق معادلتها نعوض $x = 2$, $y = 6$ في (1)

$6 = a - (2-2)^4$
$6 = a - 0 \Rightarrow a = 6$

لبيان نوع النقطة الحرجة $(2,6)$ نبحث إشارة المشتقة الأولى على خط الأعداد

$f'(x) = -4(x-2)^3$



مناطق التزايد $\{x : x < 2\}$ ، مناطق التناقص $\{x : x > 2\}$ ، $(2,6)$ نقطة نهاية عظمى محلية.

٣- إذا كان $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, $g(x) = 1 - 12x$ وكان كل من f, g متماسان عند نقطة انقلاب المنحني f وهي $(1,-11)$ جد قيمة الثوابت $a, b, c \in R$

$\because$ $f(x), g(x)$ متماسان $\Leftarrow f'(x) = g'(x)$ عند نقطة الانقلاب $(1,-11)$

$\acute{f}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $\acute{g}(x) = -12$

$3ax^2 + 2bx + c = -12$ نعوض $x = 1$

$3a(1)^2 + 2b(1) + c = -12$
$3a + 2b + c = -12 \dots\dots\dots\dots\dots(1)$

$\because$ الدالة f تملك نقطة انقلاب هي $(1,-11)$

$\therefore f''(x) = 0$ عند $x = 1$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$
$f''(1) = 6a(1) + 2b$
$6a + 2b = 0 \,] \div 2$
$3a + b = 0 \dots\dots\dots\dots(2)$

$\because (1,-11)$ نقطة $\ni$ للمنحني f $\therefore$ تحقق معادلته $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

$-11 = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1)$
$-11 = a + b + c \dots\dots\dots\dots(3)$
$\pm 12 = \mp 3a \mp 2b \mp c \dots\dots(1)$

$1 = -2a - b \dots\dots\dots(4)$
$0 = 3a + b \dots\dots\dots\dots(2)$ بالجمع

$\therefore a = 1$ نعوض في (4)

$1 = -2(1) - b \Longrightarrow 1 = -2 - b \Rightarrow b = -2 - 1 \Rightarrow b = -3$

$1 - 3 + c = -11$ نعوض a, b في (3)

$-2 + c = -11 \Longrightarrow c = -11 + 2 \Rightarrow c = -9$



٤- إذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x) = 3x^2 - x^3 + c$ فجد قيمة $c \in R$ ، ثم جد معادلة مماس المنحني في نقطة انقلابه.

∵ للدالة نهاية صغرى قيمتها 6 $\therefore f'(x) = 0$

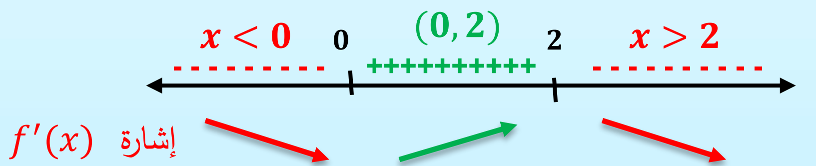
$f'(x) = 6x - 3x^2$

$6x - 3x^2 = 0] \div 3$

$2x - x^2 = 0 \Longrightarrow x(2 - x) = 0$

أما $x = 0$

أو $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$



إشارة $f'(x)$

مناطق التناقص $\{x: x < 0\}, \{x: x > 2\}$ ، مناطق التزايد $(0,2)$ ، عند $x = 0$ توجد نهاية صغرى محلية

∴ $(0,6)$ تمثل نقطة نهاية صغرى محلية.

∵ $(0,6) \in$ للدالة ∴ تحقق المعادلة $f(x) = 3x^2 - x^3 + c$

$6 = 3(0)^2 - (0)^3 + c \Rightarrow c = 6$

ملاحظة: لايجاد معادلة المماس يجب إيجاد نقطة التماس والميل وان نقطة التماس هي نقطة انقلاب.

لايجاد نقطة الانقلاب $f''(x) = 0$

$f'(x) = 6x - 3x^2$

$f''(x) = 6 - 6x$

$6 - 6x = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 3(1)^2 - (1)^3 + 6 = 8 \Rightarrow (1,8)$ نقطة الانقلاب وهي نقطة التماس أيضاً

لايجاد الميل نجد $f'(1)$

$f'(x) = 6x - 3x^2$

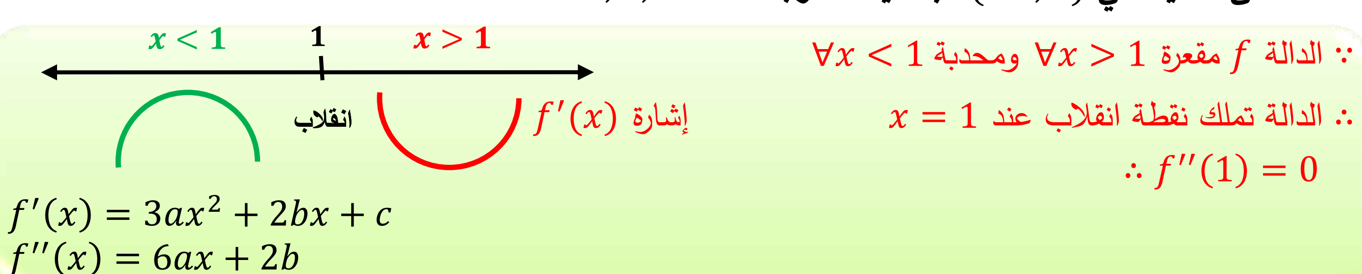
$f'(1) = 6(1) - 3(1)^2 \Longrightarrow m = 3$

معادلة المماس $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

$y - 8 = 3(x - 1) \Longrightarrow y - 8 = 3x - 3$

معادلة المماس $3x - y - 3 + 8 = 0 \Longrightarrow 3x - y + 5 = 0$

٥- إذا كان $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وكانت f مقعرة $\forall\, x > 1$ ومحدبة $\forall x < 1$ وللدالة f نقطة نهاية عظمى محلية هي $(-1, 5)$ فجد قيمة الثوابت $a, b, c \in R$



∵ الدالة f مقعرة $\forall x > 1$ ومحدبة $\forall x < 1$

∴ الدالة تملك نقطة انقلاب عند $x = 1$

$\therefore f''(1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(1) = 6a(1) + 2b \Longrightarrow 6a + 2b = 0] \div 2$

$3a + b = 0 \;\dots\dots\dots\dots (1)$

∵ للدالة نقطة نهاية عظمى هي $(-1{,}5) \Longleftarrow f'(-1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(-1) = 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c$

$f'(-1) = 3a - 2b + c$

$3a - 2b + c = 0 \dots\dots\dots\dots (2)$

∵ $(-1{,}5)$ نقطة $\ni$ للدالة ∴ تحقق معادلة الدالة

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

$5 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1)$

$5 = -a + b - c \;\dots\dots\dots\dots (3)$

$3a - 2b + c = 0 \dots\dots\dots\dots (2)$

$-a + b - c = 5 \;\dots\dots\dots\dots (3)$ (بالجمع)

$2a - b = 5 \dots\dots\dots (4)$

$3a + b = 0 \dots\dots\dots (1)$ بالجمع

$5a = 5 \Rightarrow a = 1$ نعوض في ١

$3(1) + b = 0 \Rightarrow b = -3$ نعوض قيم a, b في (3)

$-(1) + (-3) - c = 5 \Longrightarrow -1 - 3 - c = 5 \Longrightarrow -4 - c = 5$

$\Longrightarrow c = -4 - 5 \Longrightarrow c = -9$

٦- لتكن $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}$ ، $a \in R \setminus \{0\},\ x \neq 0$ برهن ان الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية

$f(x) = x^2 - ax^{-1}$

$f'(x) = 2x + ax^{-2}$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2x + \frac{a}{x^2} = 0] * x^2$

$2x^3 + a = 0 \Longrightarrow 2x^3 = -a \Longrightarrow x^3 = \frac{-a}{2}$ بالجذر التربيعي

$x = \sqrt[3]{\frac{-a}{2}}$

للبحث عن النهايات من المشتقة الثانية

$f''(x) = 2 - 2ax^{-3}$

$f''(x) = 2 - \frac{2a}{x^3}$

$f''\left(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}\right) = 2 - \frac{2a}{\left(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}\right)^3} = 2 - \frac{2a}{-\frac{a}{2}} = 2 + 2a\left(\frac{2}{a}\right)$

$= 2 + 4 = 6 > 0$ الدالة تملك نهاية صغرى محلية ولا تملك نهاية عظمى محلية

٧- المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحني $y = ax^2 + bx + c$ عند $(2,-1)$ وكانت له نهاية محلية عند $x = \frac{1}{2}$ جد قيمة $a, b, c \in R$ ؟

∵ المستقيم يمس المنحني ⟸ ميل المنحني = ميل المستقيم

ميل المنحني $= f'(x) = 2ax + b$ عند $x = 2$

$f'(2) = 2a(2) + b = 4a + b$ ميل المنحني

ميل المستقيم $= \frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-3}{-1} = 3$

ميل المنحني = ميل المستقيم

$4a + b = 3 \ldots\ldots\ldots(1)$

∵ $(2,-1)$ نقطة ∋ للمنحني y ∴ تحقق معادلته $y = ax^2 + bx + c$

$-1 = a(2)^2 + b(2) + c$

$-1 = 4a + 2b + c \ldots\ldots\ldots(2)$

∵ للمنحني نقطة نهاية محلية عند $x = \frac{1}{2}$

$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$f'(x) = 2ax + b$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2a\left(\frac{1}{2}\right) + b$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = a + b$

$a + b = 0 \ldots\ldots\ldots(3)$

$\mp 4a \mp b = \mp 3 \ldots\ldots(1)$ بالطرح

$-3a = -3 \Rightarrow a = 1$ نعوض في (3)

$1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$ نعوض قيم a, b التي حصلنا عليها في (2)

$-1 = 4(1) + 2(-1) + c$

$-1 = 4 - 2 + c$

$-1 = 2 + c \Rightarrow c = -1 - 2 \Rightarrow c = -3$

سؤال وزاري جد معادلة المنحني $f(x) = ax^3 - bx^2 + cx$ حيث النقطة $(-1,4)$ نقطة انقلاب له وميل المماس عندها يساوي (1).

∵ ميل المماس $= 1$ عند نقطة الانقلاب $(-1,4)$

$\therefore f'(-1) = 1$

$3ax^2 - 2bx + c = 1$ عند $x = -1$

$3a(-1)^2 - 2b(-1) + c = 1$

$3a + 2b + c = 1 \ldots\ldots\ldots(1)$

∵ $(-1,4)$ نقطة ∋ للمنحني ∴ تتحقق المعادلة

$4 = a(-1)^3 - b(-1)^2 + c(-1)$

$4 = -a - b - c \dots\dots\dots\dots (2)$
$1 = 3a + 2b + c \dots\dots\dots\dots (1)$ بالجمع

$5 = 2a + b \dots\dots\dots (3)$

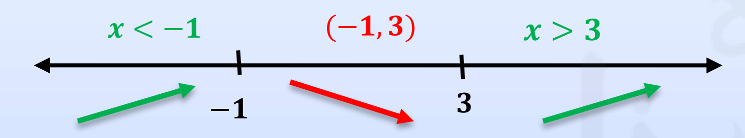
$\because (-1,4)$ نقطة انقلاب للمنحني

$\therefore f''(-1) = 0$
$f'(x) = 3ax^2 - 2bx + c$
$f''(x) = 6ax - 2b$
$f''(-1) = 6a(-1) - 2b$
$-6a - 2b = 0 \,] \div -2$
$3a + b = 0 \dots\dots\dots (4)$
$\mp 2a \mp b = \mp 5 \dots\dots (3)$ بالطرح

$a = -5$ نعوض في (4)
$3(-5) + b = 0$
$-15 + b = 0 \quad \Rightarrow b = 15$ نعوض قيم a, b في (2)
$4 = -(-5) - (15) - c \Longrightarrow 4 = 5 - 15 - c$
$4 + 10 = -c \Longrightarrow c = -14$
$\therefore f(x) = -5x^3 - 15x^2 - 14x$

أسئلة إثرائية

إذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وكانت الدالة متزايدة لكل $x < -1 , x > 3$ والدالة متناقصة بالفترة $(-1, 3)$ والمنحني يمر بنقطة الأصل وميل المماس له عند $x = 2$ يساوي (-9) جد قيم $a, b, c \in R$



$\therefore$ توجد للدالة نهاية صغرى محلية عند $x = 3$ ونهاية عظمى محلية عند $x = -1$

$f'(3) = 0$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f'(3) = 3a(3)^2 + 2b(3) + c$
$27a + 6b + c = 0 \dots\dots\dots\dots (1)$
$f'(-1) = 0$
$f'(-1) = 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c$
$f'(-1) = 3a - 2b + c$
$3a - 2b + c = 0 \dots\dots\dots (2)$
$\mp 27a \mp 6b \mp c = 0 \dots\dots (1)$ بالطرح

$-24a-8b=0\,]\div -8$
$3a+b=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

$\because$ ميل المماس عند $x=2$ هو -9

$\therefore f'(2)=-9$
$f'(2)=3a(2)^2+2b(2)+c$
$12a+4b+c=-9 \;\ldots\ldots\ldots\ldots.(4)$
$\mp 3a\pm 2b\mp c=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$ بالطرح

$9a+6b=-9\,]\div 3$
$3a+2b=-3 \;\ldots\ldots\ldots(5)$
$\mp 3a\mp b=0 \;\ldots\ldots\ldots..(3)$ بالطرح

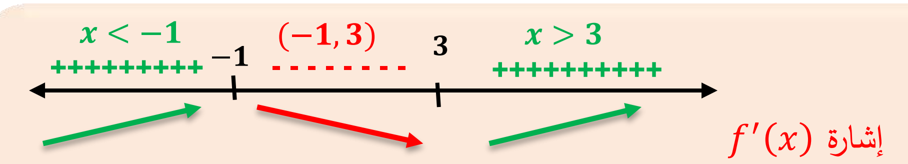
$b=-3$ نعوض في (5)
$3a+2(-3)=-3\Rightarrow 3a-6=-3\Rightarrow 3a=-3+6\Rightarrow 3a=3\Rightarrow a=1$
$3(1)-2(-3)+c=0$ نعوض قيم a,b في (2)
$3+6+c=0\Rightarrow 9+c=0\Rightarrow c=-9$

س/ إذا كان المنحني $f(x)=x^3-bx^2+cx$ يمر بالنقطة $(-2,-2)$ وكانت للدالة نقطة انقلاب عند $x=1$ جد قيمتي $b,c,\in R$ ثم جد نقطة النهاية العظمى

$\because (-2,-2)\ni$ للدالة $\therefore$ تحقق المعادلة
$-2=(-2)^3-b(-2)^2+c(-2)$
$-2=-8-4b-2c\;]\div -2$
$1=4+2b+c$
$-3=2b+c \;\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$

$\because$ للدالة نقطة انقلاب عند $x=1 \;\Leftarrow\; f''(1)=0$

$f'(x)=3x^2-2bx+c$
$f''(x)=6-2b\Longrightarrow f''(1)=6(1)-2b$
$6-2b=0\,]\div 2\Longrightarrow 3-b=0\Rightarrow b=3$ نعوض في (1)
$-3=2(3)+c\Longrightarrow -3=6+c\Rightarrow c=-3-6\Rightarrow c=-9$
$\therefore f(x)=x^3-3x^2-9x$
$f'(x)=0$ لايجاد النهايات
$f'(x)=3x^2-6x-9$
$3x^2-6x-9=0\,]\div 3$
$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
أما $x-3=0\Rightarrow x=3\Rightarrow y=-27$ نقطة حرجة $(3,-27)$
أو $x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow y=5$ نقطة حرجة $(-1,5)$



إشارة $f'(x)$

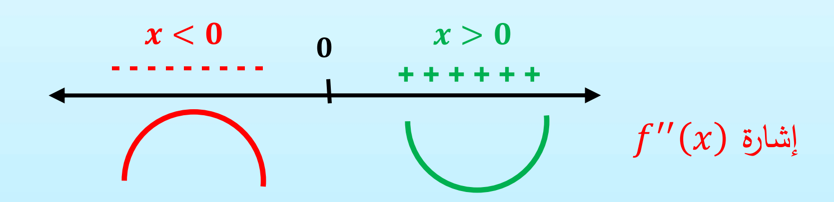
مناطق التزايد $\{x: x > 3\}, \{x: x < -1\}$ ، مناطق التناقص$(-1,3)$ ، $(-1,5)$ نقطة نهاية عظمى محلية

س/ جد نقطة الانقلاب لمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x - 2$ ثم جد معادلة المماس لهذا المنحني عند نقطة انقلابه.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x$

$6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow (0, -2)$ مرشحة للانقلاب



إشارة $f''(x)$

مناطق التقعر $\{x: x > 0\}$ ، مناطق التحدب $\{x: x < 0\}$ ، $(0, -2)$ نقطة انقلاب.

ميل المماس عند $(0, -2)$ هو المشتقة الأولى عند $x = 0$

$m = f'(0)$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(0) = 3(0) - 3$

$m = -3$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = -3(x - 0)$

$\Longrightarrow y + 2 = -3x \Longrightarrow 3x + y + 2 = 0$ معادلة المماس

س/ إذا كانت $f(x) = \frac{x-1}{x^2+ax+b}$ وكان للدالة نقطة نهاية صغرى عند $(0, -\frac{1}{2})$ جد قيم $a, b, \in R$ وإذا كان للدالة نهاية عظمى ما قيمتها ؟

$\because$ للدالة نهاية صغرى عند $(0, -\frac{1}{2}) \Leftarrow f'(x) = 0$

$$\therefore f'(x) = \frac{(x^2 + ax + b)(1) - [(x-1)(2x+a)]}{(x^2 + ax + b)^2}$$

$$f'(0) = \frac{(0 + a(0) + b) - [(0-1)(2(0) + a)]}{(0 + a(0) + b)^2}$$

$$f'(0) = \frac{b + a}{b^2}$$

$\frac{b+a}{b^2} = 0\ ] * b^2 \Rightarrow b + a = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$

$\because (0, -\frac{1}{2})$ نقطة $\in$ للمنحني $\therefore$ تحقق معادلته.

$$-\frac{1}{2} = \frac{0 - 1}{(0)^2 + a(0) + b}$$

$-\frac{1}{2} = \frac{-1}{b} \Rightarrow -b = -2 \Rightarrow b = 2$ نعوض في(1)

$2 + a = 0 \Rightarrow a = -2$

$f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+2}$

$f'(x) = \frac{(x^2-2x+2)(1)-(x-1)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$

$f'(x) = \frac{x^2-2x+2-2x^2+2x+2x-2}{(x^2-2x+2)^2}$

$f'(x) = \frac{2x-x^2}{(x^2-3x+2)^2}$

$f'(x) = 0$

$\frac{2x-x^2}{(x^2-2x+2)^2} = 0 \Rightarrow 2x-x^2 = 0 \Longrightarrow x(2-x) = 0$

أما $x = 0 \Rightarrow y = \frac{-1}{2} \Longrightarrow \left(0, -\frac{1}{2}\right)$

أو $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Longrightarrow \left(2, \frac{1}{2}\right)$

$x < 0$ - - - - - - - - 0 $(-1,3)$ ++++++++ 2 $x > 2$ - - - - - - - -

اشارة $f'(x)$

$\therefore \left(2, \frac{1}{2}\right)$ نقطة نهاية عظمى محلية

س/ أثبت انه لا توجد نقطة انقلاب للدالة $f(x) = x^4 + x^2$

$f'(x) = 4x^3 + 2x$

$f''(x) = 12x^2 + 2$

$12x^2 + 2 = 0$

$12x^2 = -2 \Rightarrow x^2 = \frac{-1}{6} \notin R$

∴لا توجد للدالة نقط انقلاب.

رسم المخطط البياني للدالة

خطوات رسم المخطط البياني

١–نجد اوسع مجال للدالة :

– إذا كانت الدالة كثيرة حدود فأوسع مجال لها هو R

– إذا كانت الدالة كسرية فأوسع مجال لها هو $R \setminus \{$اصفار المقام$\}$

– إذا كانت الدالة جذرية فنأخذ المقدار تحت الجذر ونجعله اكبر أو يساوي الصفر { المقدار ≥ 0 } ومن ثم نحل المتراجحة فيكون أوسع مجال للدالة هو الفترة التي استخرجناها.

٢ – نبين نوع التناظر:

وذلك بإيجاد صورة $(-x)$: اي نعوض$(-x)$ في الدالة.

– فإذا كانت $f(-x)=f(x)$ فهذا يعني ان المنحني متناظر حول محور الصادات.

– وإذا كان $f(-x)=-f(x)$ فهذا يعني ان المنحني متناظر مع نقطة الأصل.

٣– نجد نقط التقاطع :

وذلك بجعل $x=0$ ونستخرج قيم y

ونجعل $y=0$ ونستخرج قيم x

٤– نجد المستقيمات المحاذية الأفقية والعمودية في الدوال الكسرية فقط :

وهي مستقيمات وهمية يسير منحنى الدالة بموازاتها وهناك نوعين من المحاذيات:

– المحاذي العمودي الشاقولي: وهو يوازي محور الصادات $x=a$ وهي قيمة x التي تجعل مقام الدالة $=0$

– المحاذي الأفقي: وهو المحاذي الذي يوازي محور السينات ومعادلته $y=b$ وهي قيمة y التي تجعل مقام العلاقة $x=f(y)$ يساوي 0

ex) $f(x)=\dfrac{2-x}{x-1}$

$\therefore x-1=0 \Rightarrow x=1$ لإيجاد المحاذي العمودي نجعل المقام $=0$

لإيجاد المحاذي الأفقي يجب تغيير الدالة بدلالة y وليس x أي ان $x=f(y)$

$y=\frac{2-x}{x-1}$ الدالة

$y(x-1)=2-x$ حاصل ضرب الطرفين

$yx-y=2-x$ توزيع

$yx+x=2+y$ نجعل القيم التي تحتوي على x في الطرف الايسر

$x(y+1)=2+y$ نستخرج x عامل مشترك

$x=\frac{2+y}{y+1}$ نقسم على معامل x

$x=f(y)$ الآن أصبحت الدالة بالشكل

$\therefore y+1=0$ المقام$=0$

$y=-1$ المحاذي الافقي

يمكن ايجاد المحاذي الافقي بالصورة السريعه وحسب $\dfrac{\text{معامل اعلى قوة لـ}(x)\text{ في البسط}}{\text{معامل اعلى قوة لـ}(x)\text{ في المقام}}$

ex) $y=\dfrac{3-x}{x-1}$

$\frac{-1}{1}=-1$ المحاذي الأفقي

$\therefore y=-1$

ex) $f(x)=\dfrac{-1}{x^2+1}$

البسط عدد ثابت اي لا وجود لـ x في البسط $\therefore$ المحاذي الافقي $y=\frac{0}{1}\Rightarrow y=0$



٥- نجد مناطق التزايد والتناقص والنهايات العظمى والصغرى والنقاط الحرجة من المشتقة الأولى.
ونجد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب من المشتقة الثانية.

٦- نجد نقاط إضافية ان احتجنا لذلك.

٧- نرسم منحني الدالة.

مثال ارسم بالاستعانة بمعلوماتك في التفاضل منحني الدالة $f(x) = x^5$

١- أوسع مجال للدالة هو R

٢- نقاط التقاطع مع المحورين أ- محور الصادات

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$

ب- مع محور السينات

$y = 0 \Rightarrow x^5 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$

٣- التناظر : نعوض $(-x)$ في الدالة الاصلية

$f(-x) = (-x)^5 = -x \Longrightarrow -f(x)$

∴ المنحني متناظر مع نقطة الأصل

٤- المحاذيات: لا توجد محاذيات لأن الدالة ليست كسرية .

٥- النهايات ونقط الانقلاب.

$f'(x) = 5x^4$

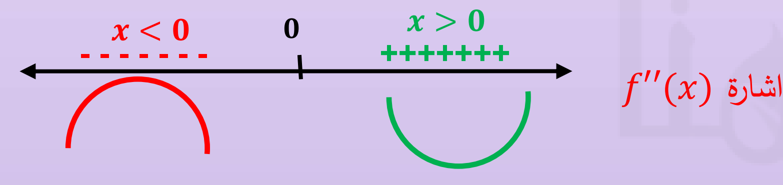
$5x^4 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Longrightarrow (0,0)$ نقطة حرجة



مناطق التزايد $\{x, x > 0\}, \{: x < 0\}$ ، $(0,0)$ نقطة حرجة لا تمثل نقطة نهاية.

$f''(x) = 20x^3$

$20x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Longrightarrow (0,0)$ نقطة مرشحة للانقلاب

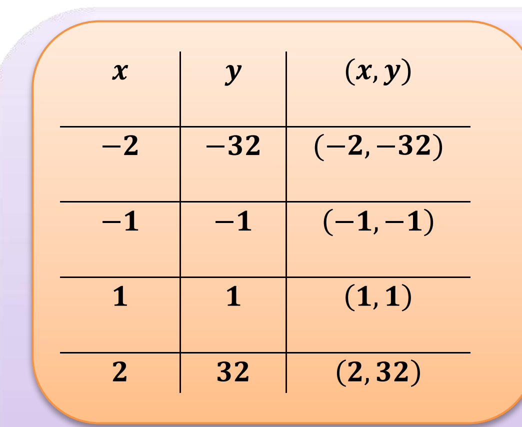


مناطق التقعر $\{x: x > 0\}$

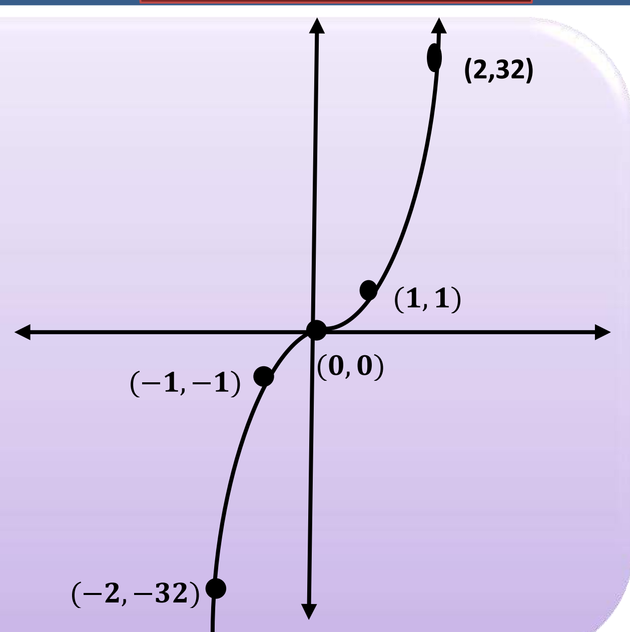
مناطق التحدب $\{x: x < 0\}$ ، $(0,0)$ نقطة انقلاب

٦- نحتاج نقاط إضافية : اذن نفرض قيم x عن يمين ويسار (0) ونعوضها في الدالة الأصلية لاستخراج قيم y

ملاحظة : إشارة $f'(x)$ تبين لنا اتجاه المنحني وإشارة $f''(x)$ تبين لنا شكل المنحني



x	y	(x,y)
-2	-32	$(-2,-32)$
-1	-1	$(-1,-1)$
1	1	$(1,1)$
2	32	$(2,32)$



مثال ارسم بالاستعانة بالتفاضل منحني الدالة $y = x^3 - 3x^2 + 4$

١- أوسع مجال للدالة هو R

٢- نقاط التقاطع : أ- مع محور الصادات

$x = 0 \Rightarrow y = 4 \Longrightarrow (0,4)$

ب- مع محور السينات

$y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0$

٣- التناظر:

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4$
$= -x^3 - 3x + 4$
$f(-x) \neq f(x)$
$f(-x) \neq -f(x)$

∴ لا يوجد تناظر مع محور الصادات أو نقطة الأصل.

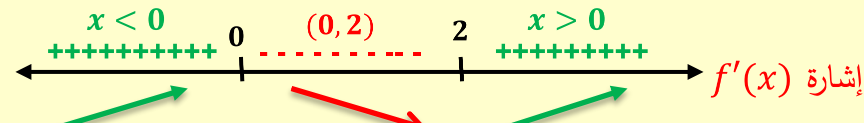
٤- المحاذيات : لا يوجد محاذيات لأن الدالة ليست كسرية.

٥- النهايات ونقاط الانقلاب

$f'(x) = 3x^2 - 6x$
$3x^2 - 6x = 0\ ] \div 3 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x(x-2) = 0$

أما $x = 0 \Rightarrow y = 4 \Longrightarrow (0,4)$ حرجة

أو $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 0 \Longrightarrow (2,0)$ حرجة



إشارة $f'(x)$

مناطق التزايد $\{x: x < 0\}, \{x: x > 2\}$

مناطق التناقص $(0,2)$ ، $(0,4)$ نقطة نهاية عظمى ، $(2,0)$ نقطة نهاية صغرى

$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$

$y = f(1) = 2 \Rightarrow (1,2)$ مرشحة للانقلاب

إشارة $f''(x)$

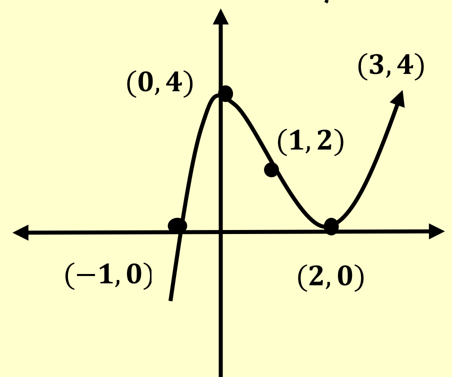
$x < 1$ ‎ - - - - - - - - ‎ 1 ‎ $x > 1$ ‎ +++++++

مناطق التقعر $\{x: x > 1\}$ ، مناطق التحدب $\{x: x < 1\}$ ، $(1,2)$ نقطة انقلاب

نعين جميع النقاط التي حصلنا عليها من حل السؤال على الاحداثيات

نحتاج نقاط إضافية من جهة يسار العدد 0 ويمين العدد 2

x	y	(x, y)
-1	0	$(-1, 0)$
3	4	$(3, 4)$



مثال **بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدالة**

$f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$

١- أوسع مجال للدالة $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

∴ اوسع مجال للدالة هو $R \setminus \{-1\}$

٢- نقاط التقاطع أ- مع محور الصادات $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1)$

ب - مع محور السينات $y = 0 \Rightarrow \frac{3x-1}{x+1} = 0 \Rightarrow 3x - 1 = 0$

$\Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow (\frac{1}{3}, 0)$

٣- التناظر: ∵ $1 \in$ لمجال الدالة لكن $(-1) \notin$ لمجال الدالة

∴ المنحني غير متناظر مع محور الصادات او نقطة الأصل

٤- المحاذيات : أ- المحاذي الشاقولي

المحاذي الشاقولي المقام $= 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

ب- المحاذي الأفقي

$y = \frac{3x-1}{x+1}$

$y(x+1) = 3x - 1$

$yx + y = 3x - 1$

$yx - 3x = -y - 1$

$x(y - 3) = -y - 1$

$x = \frac{-y-1}{y-3}$

المحاذي الأفقي المقام $= 0 \Rightarrow y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

يمكن إيجاد المحاذي الافقي حسب الملاحظة

$\frac{\text{معامل اعلى قوة لـ} (x) \text{ في البسط}}{\text{معامل اعلى قوة لـ} (x) \text{ في المقام}} = \frac{3}{1} = 3$



٥- النهايات ونقط الانقلاب

$f'(x) = \frac{(x+1)(3)-(3x-1)(1)}{(x+1)^2}$

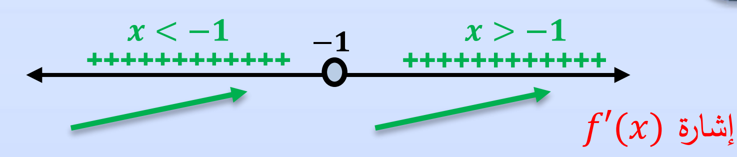
$f'(x) = \frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$

$\frac{4}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow 4 = 0$ هذا غير ممكن

∴ لا توجد نقاط حرجة

ملاحظة : في حاله عدم وجود نقاط حرجة نضع فجوة عند العدد الذي لا يحقق مجال الدالة على خط الاعداد ونبحث إشارة $f'(x)$ ليمين ويسار العدد لإيجاد مناطق التزايد والتناقص



إشارة $f'(x)$

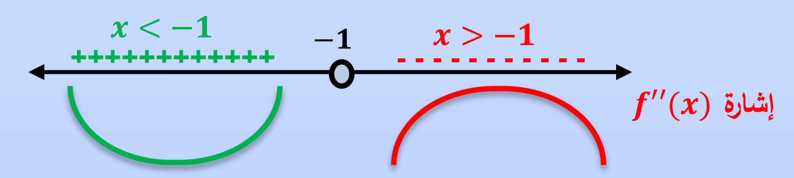
مناطق التزايد $\{x: x > -1\}, \{x: x < -1\}$ ، لا توجد نهايات عظمى أو صغرى محلية

$f'(x) = 4(x+1)^{-2}$

$f''(x) = -8(x+1)^{-3}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-8}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow -8 = 0$ هذا غير ممكن

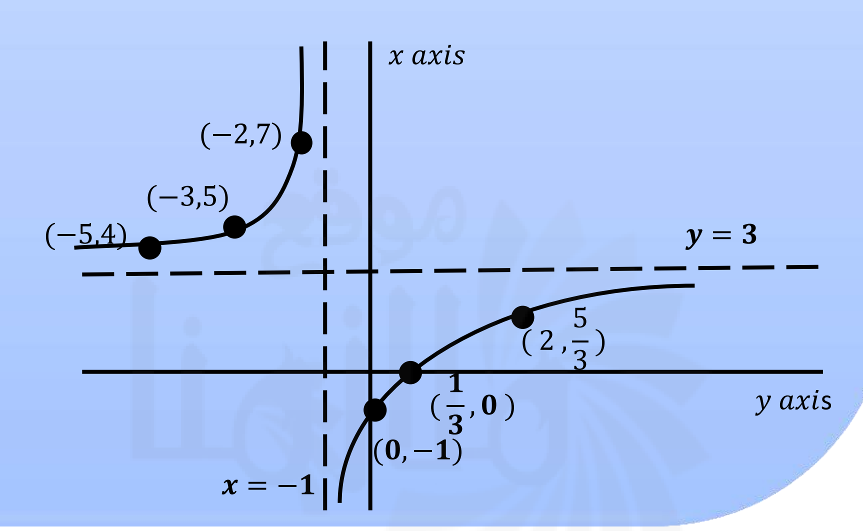
∴ لا توجد نقاط انقلاب



إشارة $f''(x)$

مناطق التحدب $\{x: x > -1\}$ ، مناطق التقعر $\{x: x < -1\}$

x	y	(x, y)
2	$\frac{5}{3}$	$\left(2, \frac{5}{3}\right)$
-2	7	$(-2, 7)$
-3	5	$(-3, 5)$
-5	4	$(-5, 4)$



مثال

باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم المنحني $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

١- أوسع مجال $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \notin R$

∴ أوسع مجال للدالة هو R

٢- نقاط التقاطع : أ- مع محور الصادات $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$

ب- مع محور السينات $y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$

٣- التناظر: $f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}=f(x)$

∴ المنحني متناظر حول محور الصادات

٤- المحاذيات أ- المحاذي لعمودي $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \notin R$

∴ لا يوجد محاذي عمودي.

ب- المحاذي الأفقي

$y=\frac{x^2}{x^2+1}$

$yx^2+y=x^2 \Rightarrow yx^2-x^2=-y \Longrightarrow x^2(y-1)=-y$

$x^2=\frac{-y}{y-1} \Longrightarrow y-1=0 \Rightarrow y=1$ المحاذي الأفقي

٥- النهايات ونقط الانقلاب

$f'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2)(2x)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

$\frac{2x}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0 \Longrightarrow (0,0)$ نقطة حرجة

إشارة $f'(x)$: $x<0$: - - - - - - - - - - ، 0 ، $x>0$: ++++++++++

مناطق التزايد $\{x: x>0\}$ ، مناطق التناقص $\{x: x<0\}$ ، $(0,0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

$f''(x)=\frac{(x^2+1)^2(2)-[(2x)(2(x^2+1)(2x)]}{(x^2+1)^4}$

$f''(x)=\frac{2(x^2+1)^2-8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$

$f''(x)=\frac{(x^2+1)[2(x^2+1)-8x^2]}{(x^2+1)^4}$

$f''(x)=\frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3}$

$f''(x)=\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$

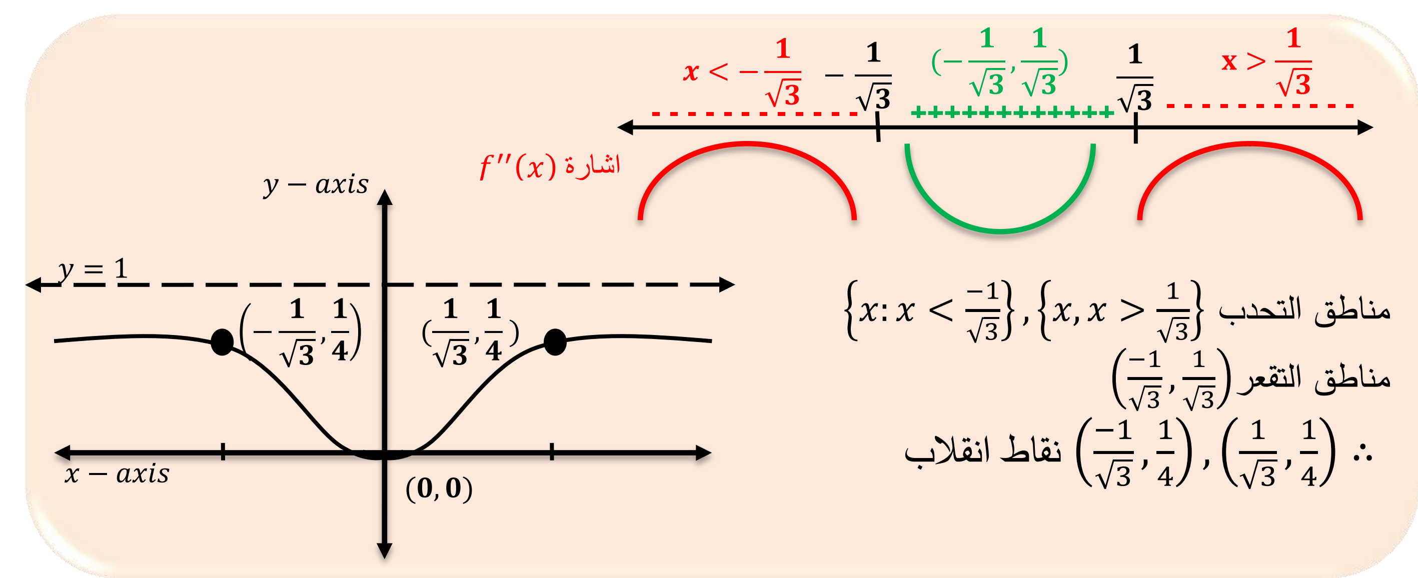
$\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}=0 \Rightarrow 2-6x^2=0 \Rightarrow 6x^2=2$

$x^2=\frac{2}{6} \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Longrightarrow x=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$

$x=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y=\frac{1}{4} \Longrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$ نقطة مرشحة

$x=\frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y=\frac{1}{4} \Longrightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$ نقطة مرشحة





مناطق التحدب $\{x: x < \frac{-1}{\sqrt{3}}\}, \{x, x > \frac{1}{\sqrt{3}}\}$

مناطق التقعر $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

$\therefore$ نقاط انقلاب $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4})$

تمارين [3 – 5]

ارسم باستخدام معلوماتك في التفاضل الدوال التالية

1) $f(x) = 10 - 3x - x^2$

١- اوسع مجال للدالة R

٢- نقاط التقاطع

أ- مع محور الصادات $x = 0 \Rightarrow y = 10 \Longrightarrow (0,10)$

ب- مع محور السينات $y = 0 \Rightarrow 10 - 3x - x^2 = 0$

$(5 + x)(2 - x) = 0$

أما $5 + x = 0 \Rightarrow x = -5 \Longrightarrow (-5,0)$

أو $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \Longrightarrow (2,0)$

٣- التناظر:

$f(-x) = 10 - 3(-x) - (-x)^2 = 10 + 3x - x^2$

$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$

$\therefore$ المنحني غير متناظر مع محور الصادات أو نقطة الأصل

٤- المحاذيات : لا يوجد محاذيات لأن الدالة ليست كسرية .

٥- النهايات ونقاط الانقلاب.

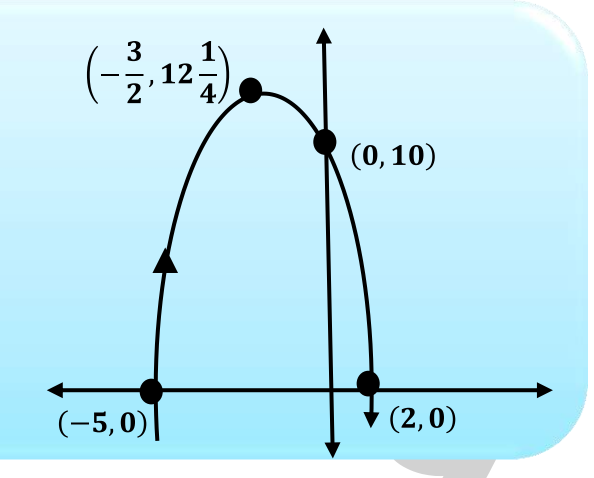
$f'(x) = -3 - 2x$

$-3 - 2x = 0 \Rightarrow -2x = 3 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$

$f\left(\frac{-3}{2}\right) = 10 - 3\left(\frac{-3}{2}\right) - \left(\frac{-3}{2}\right)^2 \Rightarrow y = 12\frac{1}{4} \Longrightarrow \left(\frac{-3}{2}, 12\frac{1}{4}\right)$ حرجة نقطة

مناطق التزايد $\{x: x < \frac{-3}{2}\}$ ، مناطق التناقص $\{x: x > \frac{-3}{2}\}$ ، نقطة نهاية عظمى $\left(\frac{-3}{2}, 12\frac{1}{4}\right)$

$f''(x) = -2 < 0$ الدالة محدبة دائماً ولا توجد نقط انقلاب



2) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

١- أوسع مجال للدالة هو R

٢- نقاط التقاطع أ- مع محور الصادات $x = 0 \Rightarrow y = 3 \Longrightarrow (0,3)$

ب- مع محور السينات $y = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$

$(x + 3)(x + 1) = 0$

أما $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Longrightarrow (-3,0)$

أو $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Longrightarrow (-1,0)$

٣- التناظر:

$f(-x) = (-x)^2 + 4(-x) + 3 \Longrightarrow= x^2 - 4x + 3$
$\neq f(-x) \neq -f(x)$

∴ المنحني غير متناظر مع محور الصادات أو نقطة الأصل .

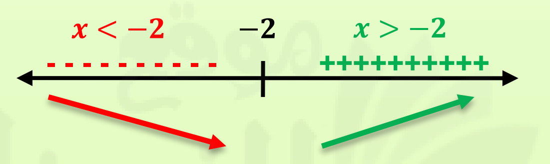
٤- المحاذيات : لا يوجد محاذيات لأن الدالة ليست كسرية.

٥- النهايات ونقاط الأنقلاب

$f'(x) = 2x + 4$

$2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$

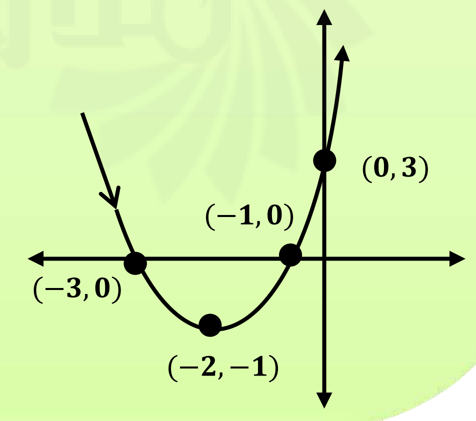
$\Rightarrow y = -1 \Longrightarrow (-2,-1)$ نقطة حرجة



إشارة $f'(x)$

مناطق التناقص $\{x: x < -2\}$ ، مناطق التزايد $\{x: x > -2\}$ ، $(-2,-1)$ نهاية صغرى محلية.

∴ الدالة مقعرة دائماً و لا توجد نقاط انقلاب. $f''(x) = 2 > 0$



3) $f(x) = (1-x)^3 + 1$

١- أوسع مجال للدالة هو R

٢- نقاط التقاطع أ- مع محور الصادات $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Longrightarrow \quad (0,2)$

ب- مع محور السينات $y = 0 \Rightarrow (1-x)^3 + 1 = 0$

$(1-x)^3 = -1$ بالجذر التكعيبي للطرفين

$1 - x = -1 \Longrightarrow \; x = 1 + 1 \Longrightarrow \; x = 2 \Longrightarrow (2,0)$

٣- التناظر

$f(-x) = \left(1-(-x)\right)^3 + 1 = (1+x)^3 + 1$

$\neq f(x) \neq -f(x)$

∴ المنحني غير متناظر حول محور الصادات أو نقطة الأصل.

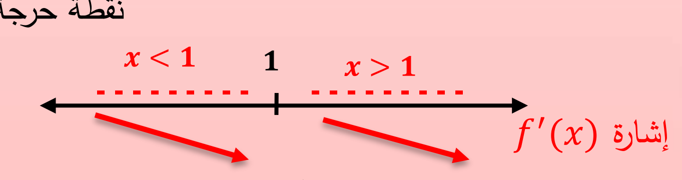
٤- المحاذيات : لايوجد محاذيات لان الدالة ليست كسرية

٥- النهايات ونقاط الأنقلاب : $f'(x) = 3\,(1-x)^2(-1) = -3(1-x)^2$

$-3(1-x)^2 = 0\,]\div -3$

$(1-x)^2 = 0$ بالجذر التربيعي

$1 - x = 0 \Longrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (1,1)$ نقطة حرجة



مناطق التناقص $\{x: x > 1\}, \{x: x < 1\}$ ، لاتوجد نهايات

$f''(x) = -6\,(1-x)(-1) = 6(1-x)$

$6\,(1-x) = 0\,]\div 6$

$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (1,1)$ مرشحة للأنقلاب

$x < 1$ 1 $x > 1$

+ + + + + + + +

إشارة $f''(x)$

مناطق التحدب $\{x: x > 1\}$ ، مناطق التقعر $\{x: x < 1\}$

$(1,1)$ نقطة انقلاب

x	y	(x,y)
3	−7	(3, −7)
−1	9	(−1, 9)

$(-1,9)$ $(0,2)$ $(1,1)$ $(2,0)$ $(3,-7)$

4) $f(x) = 6x - x^3$

١ – أوسع مجال للدالة R

٢– نقاط التقاطع أ– مع محور الصادات $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$

ب– محور السينات $y = 0 \Rightarrow 6x - x^3 = 0$

$x(6 - x^2) = 0$

أما $x = 0 \Rightarrow (0,0)$

أو $6 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \mp\sqrt{6} \Longrightarrow (\sqrt{6},0), (-\sqrt{6},0)$

٣– التناظر:

$f(-x) = 6(-x) - (-x)^3 = -6x + x^3 = -f(x)$

∴ المنحني متناظر حول نقطة الأصل.

٤– المحاذيات : لا توجد محاذيات لأن الدالة ليست كسرية

٥– النهايات ونقاط الانقلاب

$f'(x) = 6 - 3x^2$

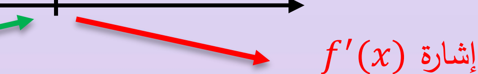
$6 - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 2 \Longrightarrow x = \mp\sqrt{2}$

$x = \sqrt{2} \Rightarrow y = 4\sqrt{2} \Longrightarrow (\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ نقطة حرجة

$x = -\sqrt{2} \Rightarrow y = 4\sqrt{2} \Longrightarrow (-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ نقطة حرجة

$x < -\sqrt{2}$ $-\sqrt{2}$ $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $\sqrt{2}$ $x > \sqrt{2}$

- - - - - - - - - - ++++++++++ - - - - - - - - - -



إشارة $f'(x)$

مناطق التناقص $\{x: x > \sqrt{2}\}$, $\{x: x < -\sqrt{2}\}$ ، مناطق التزايد $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ نقطة نهاية عظمى ، $(-\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ نقطة نهاية صغرى

$f''(x) = -6x$

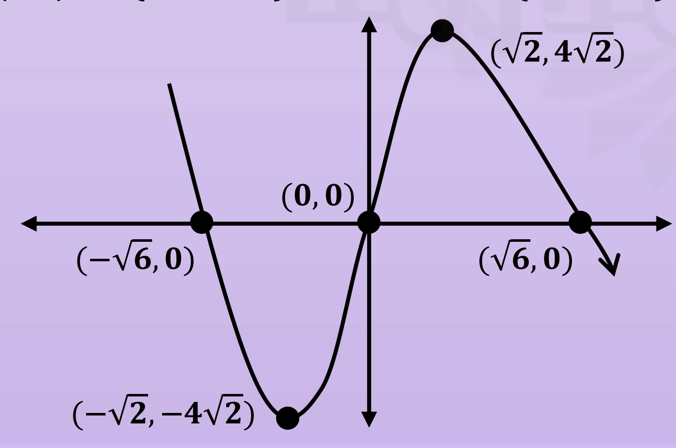
$-6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$ مرشحة للانقلاب

$x < 0$ 0 $x > 0$

++++++++++ - - - - - - - - - - - -

اشارة $f''(x)$

مناطق التحدب $\{x, x > 0\}$ ، مناطق التقعر $\{x: x < 0\}$ ، $(0,0)$ نقطة أنقلاب



$5)\ f(x)=\frac{1}{x}$

١- أوسع مجال للدالة $R\setminus\{0\}$

٢- نقاط التقاطع
أ- مع محور الصادات $x=0\Rightarrow f(x)$ غير معرفة
ب- مع محور السينات $y=0\Rightarrow \frac{1}{x}=0\Rightarrow 1=0$ هذا غير ممكن

∴ لا توجد نقاط تقاطع مع محور السينات والصادات

٣- التناظر: $f(-x)=-\frac{1}{x}=-f(x)$

∴ المنحني متناظر مع نقطة الأصل

٤- المحاذيات
أ - المحاذي العامودي $x=0$
ب- المحاذي الأفقي

$y=\frac{1}{x}$

$yx=1\Longrightarrow x=\frac{1}{y}$

المقام $=0\Rightarrow y=0$

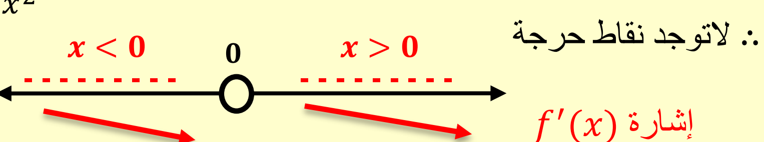
٥- النهايات ونقاط الانقلاب:

$f(x)=x^{-1}$

$f'(x)=-x^{-2}$

$-\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow -1\neq 0$

∴ لاتوجد نقاط حرجة

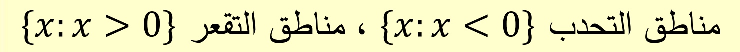


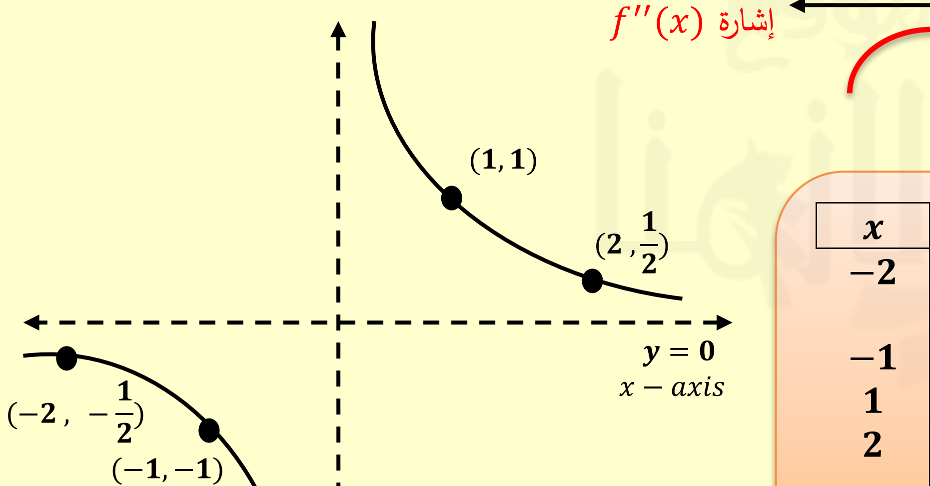
مناطق التناقص $\{x: x<0\}$, $\{x: x>0\}$

$f''(x)=2x^{-3}\Longrightarrow f''(x)=\frac{2}{x^3}\Longrightarrow \frac{2}{x^3}=0\Longrightarrow 2\neq 0$

∴ لا توجد نقاط انقلاب

مناطق التحدب $\{x: x<0\}$ ، مناطق التقعر $\{x: x>0\}$





x	y	(x,y)
-2	$-\frac{1}{2}$	$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$
-1	-1	$(-1,-1)$
1	1	$(1,1)$
2	$\frac{1}{2}$	$\left(2,\frac{1}{2}\right)$

6) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

١- أوسع مجال للدالة $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ أوسع مجال للدالة هو $R \setminus \{-1\}$

٢- نقاط التقاطع أ- مع محور الصادات $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1)$

ب – مع محور السينات $y = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1,0)$

٣- التناظر

$f(-x) = \frac{-x-1}{-x+1}$

$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$

∴ المنحني غير متناظر مع محور الصادات أو نقطة الأصل

٤- المحاذيات أ- المحاذي العامودي $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

ب- المحاذي الأفقي

$y = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow yx + y = x - 1 \Rightarrow yx - x = -1 - y$

$x(y-1) = -1 - y \Rightarrow x = \frac{-1-y}{y-1} \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$ المحاذي الأفقي

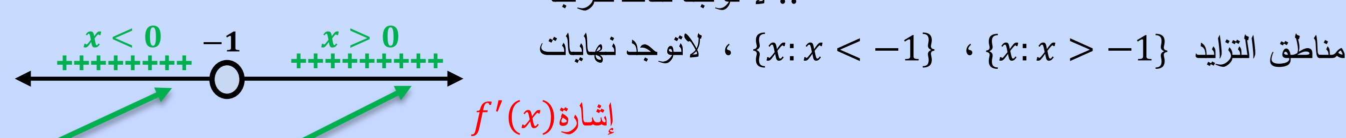
٥- النهايات ونقاط الانقلاب

$f'(x) = \frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

$\frac{2}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow 2 = 0$ هذا غير ممكن

∴ لا توجد نقاط حرجة

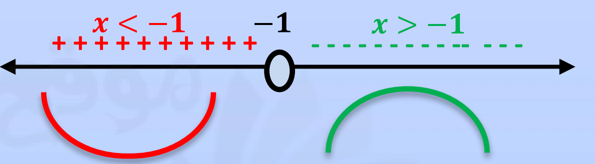
مناطق التزايد $\{x: x > -1\}$ ، $\{x: x < -1\}$ ، لاتوجد نهايات



إشارة $f'(x)$

$f'(x) = 2(x+1)^{-2} \Rightarrow f''(x) = -4(x+1)^{-3}$

$f''(x) = \frac{-4}{(x+1)^3} \Rightarrow \frac{-4}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow -4 \neq 0$

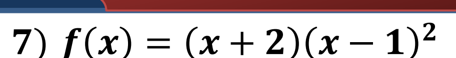


∴ لا توجد نقاط أنقلاب

مناطق التقعر $\{x: x < -1\}$

مناطق الحدب $\{x: x > -1\}$

x	y	(x, y)
-2	3	$(-2, 3)$
-3	2	$(-3, -2)$

$7)\ f(x) = (x+2)(x-1)^2$

١- أوسع مجال للدالة هو R

٢- نقاط التقاطع أ - محور الصادات $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Longrightarrow (0,2)$

ب - محور السينات

$y = 0 \Rightarrow (x+2)(x+1)^2 = 0$

أما $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Longrightarrow (-2,0)$

أو $(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow (1,0)$

٣- التناظر:

$f(-x) = (-x+2)(-x-1)^2$

$f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$

∴ المنحني غير متناظر حول محور الصادات أو نقطة الأصل

٤- المحاذيات : لا توجد محاذيات لأن الدالة ليست كسرية

٥- النهايات ونقاط الانقلاب

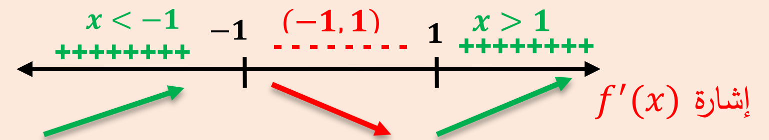
$\acute{f}(x) = (x+2)[2(x-1)(1)] + (x-1)^2(1)$ مشتقة حاصل ضرب دالتين

$= 2(x+2)(x-1) + (x-1)^2 \Longrightarrow (x-1)[2(x+2) + (x-1)]$

$= (x-1)[2x+4+x-1] \Longrightarrow (x-1)(3x+3) = 0$

أما $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (1,0)$ حرجة

أو $3x + 3 = 0 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (-1,4)$ حرجة



إشارة $f'(x)$

مناطق التزايد $\{x: x < -1\}, \{x: x > 1\}$

مناطق التناقص $(-1,1)$

$(1,0)$ نهاية صغرى محلية، $(-1,4)$ نهاية عظمى محلية

$f''(x) = (x-1)(3) + (3x+3)(1)$

$3x - 3 + 3x + 3 = 0$

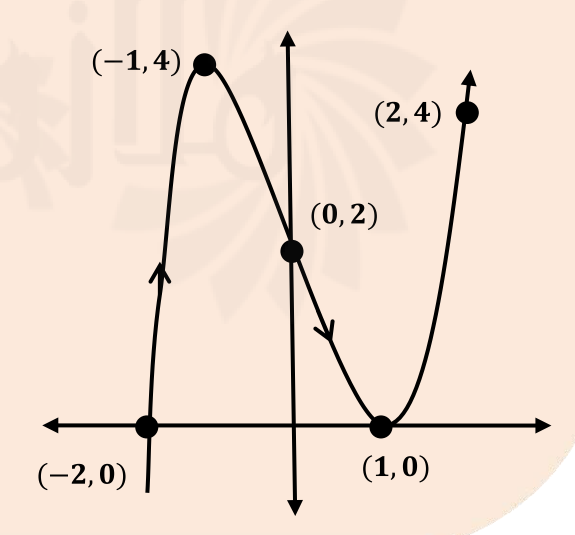
$6x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0,2)$ مرشحة للانقلاب

$x < 0$ - - - - - - - - 0 $x > 0$ + + + + + + +

إشارة $f''(x)$

مناطق التحدب $\{x: x < 0\}$ ، مناطق التقعر $\{x: x > 0\}$ ، $(0,2)$ نقطة انقلاب

x	y	(x, y)
2	4	(2, 4)





8) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

١- أوسع مجال : $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \notin R$ ∴ اوسع مجال للدالة هو R

٢- نقاط التقاطع : أ- مع محور الصادات $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0,-1)$

ب- مع محور السينات

$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1 \Rightarrow (1,0)\ ,(-1,0)$

٣- التناظر:

$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

$f(-x) = f(x)$

∴ المنحني متناظر حول محور الصادات

٤- المحاذيات : أ- المحاذي العمودي $x^2 + 1 \neq 0$

∴ لا يوجد محاذي عمودي

ب- المحاذي الأفقي $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

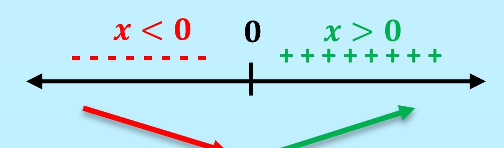
$yx^2 + y = x^2 - 1 \Rightarrow yx^2 - x^2 = -1 - y \Rightarrow x^2(y-1) = -1 - y$

$x^2 = \frac{-1-y}{y-1} \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$ المحاذي الأفقي

٥- النهايات ونقاط الانقلاب

$f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

$\frac{4x}{(x^2+1)} = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0,-1)$ نقطة حرجة



مناطق التزايد $\{x: x > 0\}$

مناطق التناقص $\{x: x < 0\}$

$(0,-1)$ نقطة نهاية صغرى محلية.

$f''(x) = \frac{(x^2+1)^2(4)-(4x)[2(x^2+1)(2x)]}{(x^2+1)^4}$

$f''(x) = \frac{4(x^2+1)^2-(16x^2)(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)[4(x^2+1)-16x^2]}{(x^2+1)^4}$

$f''(x) = \frac{4x^2+4-16x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}$

$\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow 4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 12x^2 = 4$

$x^2 = \frac{4}{12} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$

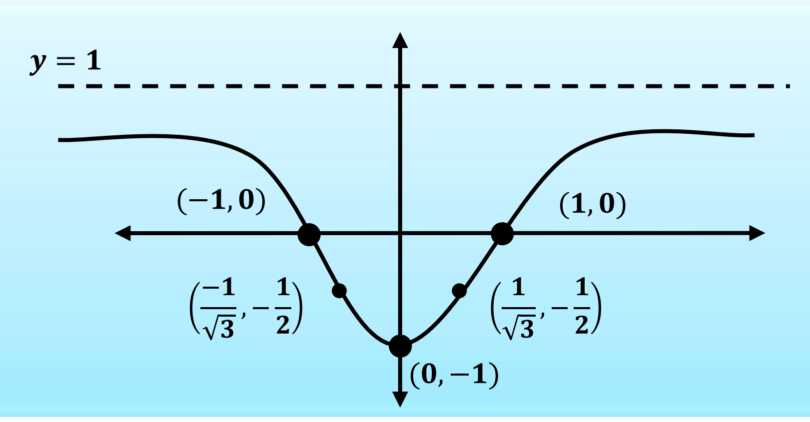
$x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ - - - - - - $\frac{1}{\sqrt{3}}$ + + + + + + + + $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ - - - - - - $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$

$x = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ مرشحة للأنقلاب

مناطق التقعر $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ، مناطق التحدب $\left\{x: x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{x: x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ نقطة انقلاب، $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$ نقطة انقلاب



9) $f(x)=2x^2-x^4$

١- أوسع مجال للدالة هو R

٢- نقاط التقاطع   أ- مع محور الصادات $x=0\Rightarrow y=0\Rightarrow(0,0)$

ب- مع محور السينات

$y=0\Rightarrow 2x^2-x^4=0$

$x^2(2-x^2)=0$

أما $x^2=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,0)$

أو $2-x^2=0\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\mp\sqrt{2}\quad\Rightarrow(\sqrt{2},0),(-\sqrt{2},0)$

٣- التناظر: $f(-x)=2(-x)^2-(-x)^4=2x^2-x^4=f(x)$

∴ المنحني المتناظر حول محور الصادات

٤- المحاذيات : لا يوجد محاذيات لأن الدالة ليست كسرية.

٥- النهايات ونقاط الانقلاب.

$f'(x)=4x-4x^3$

$4x-4x^3=0\,]\div 4$

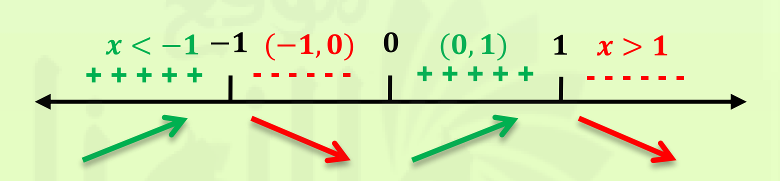
$x-x^3=0\Longrightarrow x(1-x^2)=0$

أما $x=0\Rightarrow y=0\Rightarrow(0,0)$ حرجة

أو $1-x^2=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\mp1$

$x=1\Rightarrow y=1\Rightarrow(1,1)$ حرجة

$x=-1\Rightarrow y=1\Rightarrow(-1,1)$ حرجة



مناطق التزايد $\{x:x<-1\},(0,1)$ ، مناطق التناقص $\{x:x>1\},(-1,0)$

$(-1,1),(1,1)$ نقاط نهايات عظمى محلية ، $(0,0)$ نهاية صغرى محلية

$f''(x)=4-12x^2$

$4-12x^2=0\Longrightarrow 12x^2=4$

$\Rightarrow x^2=\frac{4}{12}\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}\Longrightarrow x=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$

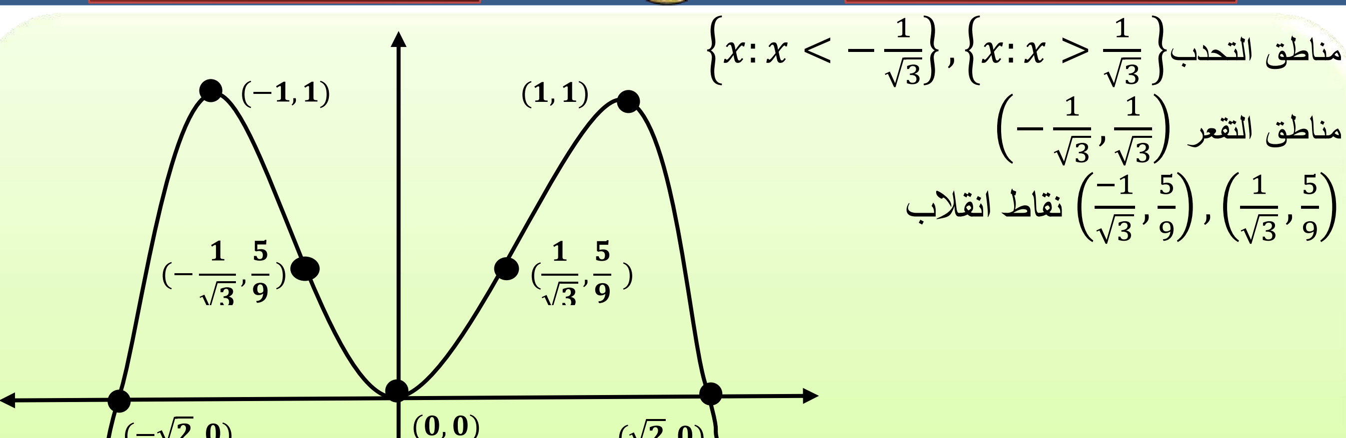
$x=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow y=\frac{5}{9}\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{5}{9}\right)$

$x=\frac{-1}{\sqrt{3}}\Rightarrow y=\frac{5}{9}\Rightarrow\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{5}{9}\right)$

$x<-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $x>\frac{1}{\sqrt{3}}$

- - - - - - - - -   +++++++++   - - - - - - - - -





مناطق التحدب $\{x: x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\}, \{x: x > \frac{1}{\sqrt{3}}\}$

مناطق التقعر $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

نقاط انقلاب $(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9})$

10) $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$

١- أوسع مجال للدالة $x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3 \notin R$

أوسع مجال للدالة هو R

٢- نقاط التقاطع أ- مع محور الصادات $x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0,2)$

ب- مع محور السينات $y = 0 \Rightarrow \frac{6}{x^2+3} = 0 \Rightarrow 6 \neq 0$

∴ لا توجد نقاط تقاطع مع محور السينات

٣- التناظر: $f(-x) = \frac{6}{(-x)^2+3} = \frac{6}{x^2+3} = f(x)$

∴ المنحني متناظر حول محور الصادات.

٤- المحاذيات أ- المحاذي العمودي $x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3 \notin R$

∴ لا يوجد محاذي عامودي

ب- المحاذي الأفقي $y = \frac{6}{x^2+3}$

$yx^2 + 3y = 6 \Rightarrow yx^2 = 6 - 3y \Rightarrow x^2 = \frac{6-3y}{y}$

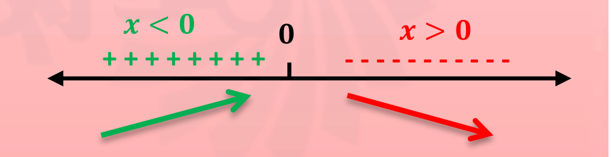
$y = 0$ المحاذي الأفقي

٥- النهايات ونقاط الانقلاب

$f(x) = 6\,(x^2+3)^{-1}$

$f'(x) = -6(x^2+3)^{-2}(2x) \Rightarrow \frac{-12x}{(x^2+3)^2} = 0$

$-12x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0,2)$ حرجة



مناطق التزايد $\{x: x < 0\}$ ، مناطق التناقص $\{x: x > 0\}$

نقطة نهاية عظمى محلية $(0,2)$

$f'(x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$

$$f''(x) = \frac{(x^2+3)^2(-12) - (-12x)[2(x^2+3)(2x)]}{(x^2+3)^4} = \frac{(x^2+3)[-12(x^2+3) + 48x^2]}{(x^2+3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-12x^2 - 36 + 48x^2}{(x^2+3)^3} = \frac{36x^2 - 36}{(x^2+3)^3}$$

$$\frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3}=0 \Rightarrow 36x^2-36=0 \Longrightarrow 36x^2=36 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\mp 1$$

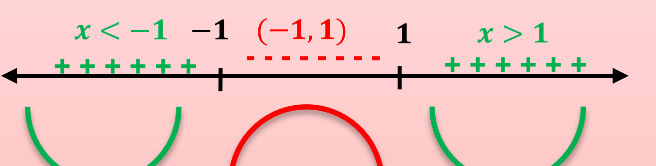
$x=1 \Rightarrow y=\frac{3}{2} \Rightarrow \left(1\,,\,\frac{3}{2}\right)$

$x=-1 \Rightarrow y=\frac{3}{2} \Rightarrow (-1,\frac{3}{2})$ نقاط مرشحة للانقلاب

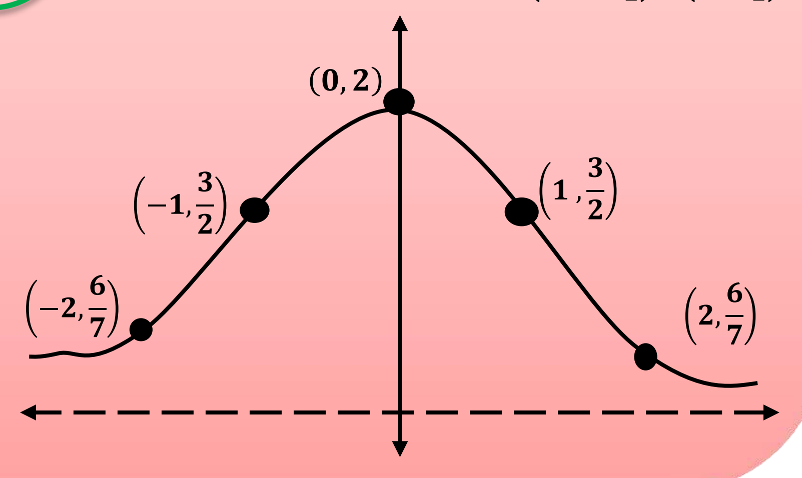
مناطق التقعر $\{x: x<-1\}$, $\{x: x>1\}$

مناطق التحدب $(-1,1)$

نقاط أنقلاب $\left(-1\,,\,\frac{3}{2}\right),\left(1\,,\,\frac{3}{2}\right)$



x	y	(x,y)
2	$\frac{6}{7}$	$(2,\frac{6}{7})$
-2	$\frac{6}{7}$	$\left(-2,\frac{6}{7}\right)$



سؤال التمارين العامة : باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم المنحني البياني للدالة $yx^2=1$

$y=\frac{1}{x^2}$

١- أوسع مجال $x^2=0 \Rightarrow x=0$ ∴ أوسع مجال للدالة $R\setminus\{0\}$

٢- نقاط التقاطع أ- مع محور الصادات غير معرف $x\neq 0 \Rightarrow y$

∴ لاتوجد نقاط تقاطع مع محور الصادات

ب- مع محور السينات $y=0 \Rightarrow \frac{1}{x^2}=0 \;\Rightarrow 1\neq 0$

∴ لاتوجد نقاط تقاطع مع محور السينات

٣- التناظر :

$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}$

$f(-x)=f(x)$

∴ المنحني متناظر حول محور الصادات.

٤- المحاذيات أ- المحاذي العمودي $x^2=0 \;\Rightarrow x=0$

ب- المحاذي الافقي

$y=\frac{1}{x^2} \Rightarrow yx^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{y} \Longrightarrow y=0$

٥- النهايات ونقاط الانقلاب

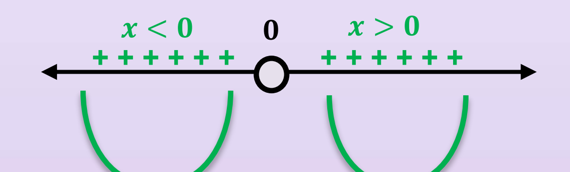
$y=x^{-2}$

$y'=-2x^{-3} \Longrightarrow \frac{-2}{x^3}=0 \;\Rightarrow -2\;\neq 0$

∴ لاتوجد نقاط حرجة.

مناطق التزايد $\{x: x < 0\}$ ، مناطق التناقص $\{x, x > 0\}$

لا توجد نهايات



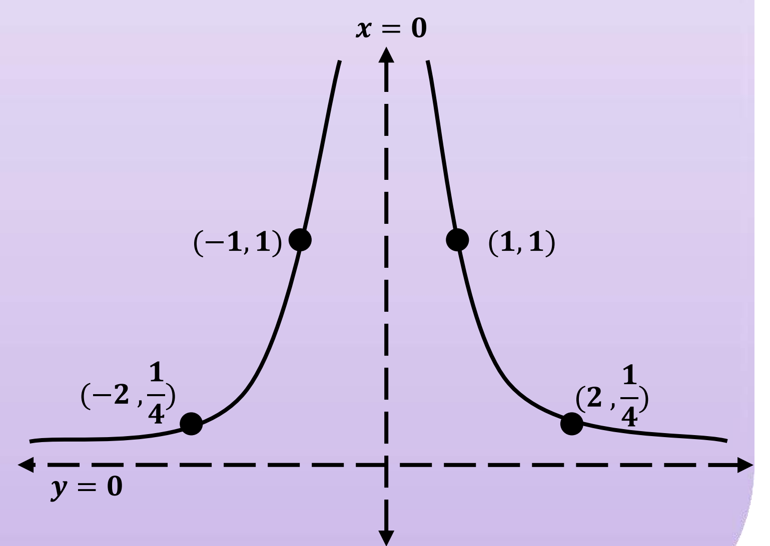
$$y'' = 6x^{-4} \Rightarrow y'' = \frac{6}{x^4} \Longrightarrow \frac{6}{x^4} = 0 \Rightarrow 6 \neq 0$$

∴ لا توجد نقاط انقلاب

مناطق التقعر $\{x: x < 0\}, \{x: x > 0\}$

x < 0   0   x > 0

x	y	(x, y)
-2	$\frac{1}{4}$	$(-2, \frac{1}{4})$
-1	1	$(-1, 1)$
1	1	$(1, 1)$
2	$\frac{1}{4}$	$(2, \frac{1}{4})$



تطبيقات عملية على القيم العظمى او الصغرى

ظهرت في القرن السابع عشر الكثير من الأسئلة دفعت الى تطور حساب التفاضل والتكامل ومن أمثلة ذلك المسائل التي وردت في بحوث الفيزياء مثل اقصى ارتفاع تصله قذيفة أطلقت بزوايا مختلفة، أو أقصى ارتفاع يصله جسم مقذوف شاقولياً إلى أعلى أو أقل زمن وأقل كلفة ومسائل من الصناعات مثل أقل مساحة وأكبر حجم وأقل محيط....الخ.

ولحل هذه المسائل نتبع الخطوات الآتية:

١ – نرسم مخطط للمسألة (إن أمكن) ونعين عليه الأجزاء المهمة من المسألة.

٢ – نكون الدالة المراد إيجاد قيمتها العظمى أو الصغرى ونحدد مجالها على ان تكون في متغير واحد.

٣ – إذا كان المجال فترة مغلقة نجد الأعداد الحرجة وقيم الدالة في أطراف الفترة وفي الاعداد الحرجة فأيها أكبر هي القيمة العظمى وأيها أصغر هي القيمة الصغرى.

ملاحظات مهمة

- إذا كانت الدالة في أكثر من متغير، إذن يجب إيجاد علاقة تساعدنا على تقليل عدد المجاهيل .
- عندما يذكر في السؤال أكبر أو أصغر شكل هندسي ثنائي الأبعاد فتكون الدالة الرئيسية هي دالة مساحة ذلك الشكل.
- عندما يذكر في السؤال أكبر أو اصغر شكل هندسي ثلاثي الأبعاد فتكون الدالة الرئيسية هي دالة حجم ذلك الشكل.
- عندما يطلب في السؤال أقرب نقطة أو أبعد نقطة من نقطة أخرى إذن الدالة الرئيسية هي دالة المسافة.

$$S = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

- عندما يذكر في السؤال قيمة عددية لمساحة أو محيط أو حجم ....ألخ لشكل هندسي فيعتبر القانون هو العلاقة المساعدة.
- عندما يذكر في السؤال مساحة المعدن المستخدم فإن الدالة هي قانون المساحة الكلية للشكل.

مثال جد العدد الذي إذا أضيف الى مربعه يكون الناتج أصغر ما يمكن.

نفرض العدد هو x ، مربع العدد هو x^2

[لا يوجد داعي لإيجاد علاقة مساعدة وذلك لأن السؤال فيه مجهول واحد فقط هو x]

∴ نجد الدالة الرئيسية من صيغة السؤال وذلك بأضافة العدد الى مربعه

$f(x) = x + x^2$ نشتق الدالة بالنسبة الى x

$f'(x) = 1 + 2x$

نجعل المشتقة $= 0$

$1 + 2x = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$

نختبر قيمة x على خط الأعداد وذلك للتأكد من النهاية صغرى محلية لوجود كلمة ا صغر ما يمكن في السؤال

$x < -\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$ $x > -\frac{1}{2}$

- - - - - - - - - - -   + + + + + + + + + + +

اشارة $\acute{f}(x)$

∴ توجد نهاية صغرى محلية عند $x = -\frac{1}{2}$

∴ العدد هو $\left(-\frac{1}{2}\right)$

ملاحظة : نستطيع اختبار قيم النهايات بطريقة المشتقة الثانية

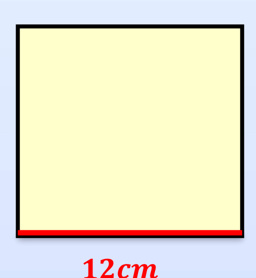
$f''\left(\frac{-1}{2}\right) = 2 > 0$

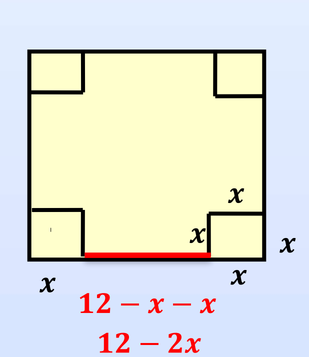
∴ توجد للدالة نهاية صغرى عند $x = -\frac{1}{2}$

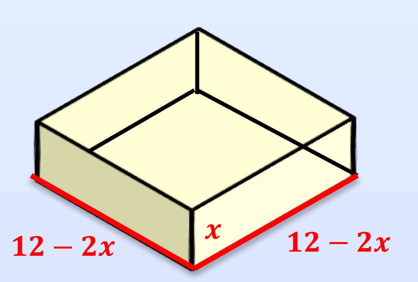
∴ العدد هو $-\frac{1}{2}$

مثال

صنع صندوق مفتوح من قطعة من النحاس مربعة الشكل طول ضلعها $(12cm)$ وذلك بقص اربعة مربعات متساوية الأبعاد من أركانها الأربعة ثم ثني الاجزاء البارزة منها، ما هو الحجم الاعظم ؟







نفرض طول ضلع المربع المقصوص x

∴ أبعاد الصندوق هي الطول $12 - 2x$ ، العرض $12 - 2x$ ، الأرتفاع x

∵ مطلوب السؤال هو الحجم الاعظم.

∴ حجم الصندوق = مساحة القاعدة (مربع)× الارتفاع.

$$v = (12 - 2x)(12 - 2x)(x)$$
$$v = f(x) = x(12 - 2)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$v = f(x) = x(144 - 48x + 4x^2)$$
$$v = f(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

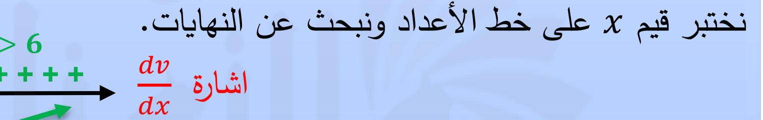
∵ الدالة بمتغير واحد ∴ لا يوجد داعي لتقليل المجاهيل ∴ نشتق $f(x)$ بالنسبة إلى x

$$\frac{dv}{dx} = f'(x) = 144 - 96x + 12x^2$$
$$\frac{dv}{dx} = 0 \Rightarrow 144 - 96x + 12x^2 = 0] \div 12$$
$$12 - 8x + x^2 = 0$$
$$(6 - x)(2 - x) = 0$$

أما $6 - x = 0 \Rightarrow x = 6$

أو $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

نختبر قيم x على خط الأعداد ونبحث عن النهايات.



اشارة $\frac{dv}{dx}$

∴ توجد نهاية عظمى عند $x = 2$

ونهاية صغرى عند $x = 6$ ∴ تهمل

طول الضلع المقصوص $\therefore x = 2\ cm$

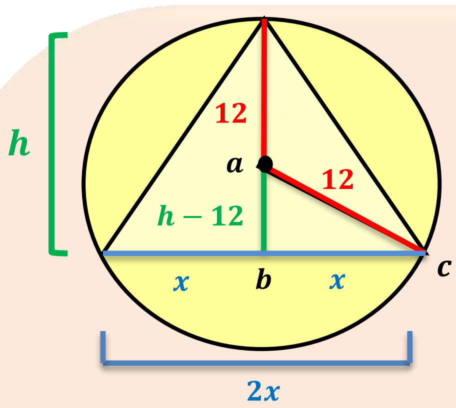
نكمل حل مطلوب السؤال وهو حجم الصندوق.

∴ نعوض قيمة x التي حصلنا عليها في دالة الحجم (1)

$$\therefore v = 2\big(12 - 2(2)\big)^2$$
$$= 2(12 - 4)^2 = 2(64) = 128\ cm^3$$



مثال جد بعدي أكبر مثلث متساوي الساقين يمكن ان يوضع داخل دائرة نصف قطرها $(12cm)$. ثم برهن ان نسبة مساحة المثلث إلى مساحة الدائرة كنسبة $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$



نفرض ارتفاع المثلث $= h$ ، قاعدة المثلث $= 2x$

ملاحظة: المسألة التي تحتوي على أكثر من متغير واحد يجب ايجاد علاقة بين المتغيرات لتقليل عددها.

نجد العلاقة من مبرهنة فيثاغورس للمثلث abc

$(12)^2 = (h-12)^2 + x^2$

$144 = h^2 - 24h + 144 + x^2$

$x^2 = 24h - h^2$ بالجذر التربيعي

$x = \sqrt{24h - h^2}$ ……..(1) العلاقة

نجد الدالة الرئيسية من قانون مساحة المثلث الكبير

مساحة المثلث $= \frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

$A = \frac{1}{2}(2x)h$

$A = xh$ ………(2)

$A = h\sqrt{24h - h^2}$ نعوض 1 في 2

∵ قيمة h موجبة ∴ يمكن ادخالها داخل الجذر التربيعي فتكون h^2 و ذلك لتوحيد الجذر ولسهولة عملية الاشتقاق

$A = \sqrt{h^2(24h - h^2)} \Rightarrow A = \sqrt{24h^3 - h^4}$

$A = (24h^3 - h^4)^{\frac{1}{2}}$ نشتق بالنسبة إلى h

$\frac{dA}{dh} = \frac{1}{2}(24h^3 - h^4)^{\frac{-1}{2}}(72h^2 - 4h^3)$

$\frac{dA}{dh} = \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}}$, $\frac{dA}{dh} = 0$

$\frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}} = 0$

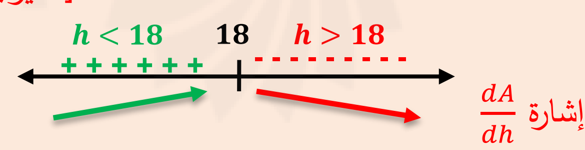
$\Rightarrow 72h^2 - 4h^3 = 0\,] \div 4$

$18h^2 - h^3 = 0 \Rightarrow h^2(18 - h) = 0$

أما $h^2 = 0 \Rightarrow h = 0$ يهمل [لا يوجد ارتفاع قيمته صفر]

أو $18 - h = 0 \Rightarrow h = 18\ cm$

إشارة $\frac{dA}{dh}$



∴ توجد نهاية عظمى عند $h = 18$ ⟸ $h = 18\ cm$ ارتفاع المثلث

$x = \sqrt{24(18) - (18)^2}$ نعوض في ١

$x = \sqrt{18(24 - 18)} \Rightarrow x = \sqrt{18(6)} \Rightarrow x = 6\sqrt{3}\ cm$

$\therefore 2x = 2(6\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}\ cm$ طول قاعدة المثلث

$A_1 = \pi r^2 = \pi(12)^2 = 144\pi \ cm^2$ مساحة الدائرة

$A_2 = \frac{1}{2}(2x)h = \frac{1}{2}(12\sqrt{3})(18) = 108\sqrt{3} \ cm^2$ مساحة المثلث

$\frac{A_2}{A_1} = \frac{108\sqrt{3}}{144\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

مثال

جد بعدي أكبر مستطيل يمكن ان يوضع داخل مثلث طول قاعدته $(24cm)$ وارتفاعه $(18cm)$ بحيث ان رأسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والراسين الباقيين تقعان على ساقيه

نفرض أبعاد المستطيل $x, y \ cm$

∵ المتغيرات أكثر من واحد إذن يجب إيجاد علاقة مساعدة لتقليل عدد المجاهيل وذلك من تشابه المثلثين bcq, btr

$\frac{tr}{cq} = \frac{ba}{bp}$

$\frac{y}{24} = \frac{18-x}{18}$

$18y = 24(18-x)$

$y = \frac{24(18-x)}{18} \Rightarrow y = \frac{4}{3}(18-x) \ldots\ldots (1)$

الدالة الرئيسية هي مساحة المستطيل

∴ مساحة المستطيل = الطول× العرض.

$\therefore A = xy$

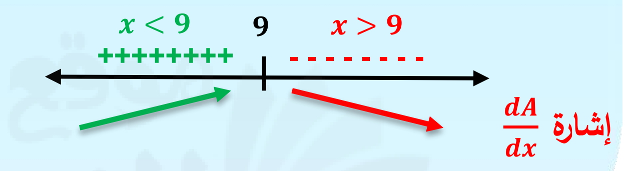
$A = x\left(\frac{4}{3}(18-x)\right)$ نعوض 1 في 2

$A = \frac{72}{3}x - \frac{4}{3}x^2 \Rightarrow A = 24x - \frac{4}{3}x^2$

$\frac{dA}{dx} = 24 - \frac{8}{3}x$ نشتق بالنسبة إلى x

$24 - \frac{8}{3}x = 0] * 3$

$72 - 8x = 0 \Rightarrow 8x = 72 \Rightarrow x = 9$



∴ توجد نهاية عظمى محلية عند $x = 9$

$\therefore x = 9cm$ البعد الأول

$y = \frac{4}{3}(18-9) \Rightarrow y = \frac{4}{3}(9) \Rightarrow y = 12 \ cm$ البعد الاخر نعوض قيمة x في 1

مثال

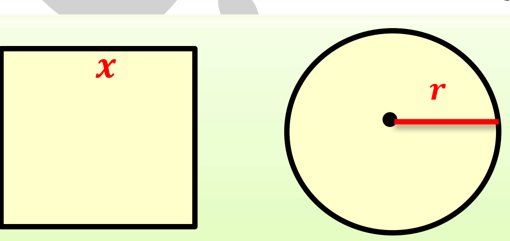
مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي $(60cm)$ أثبت انه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين اصغر ما يمكن فإن طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع.

نفرض طول نصف قطر الدائرة $r \ cm$

طول ضلع المربع $x \ cm$

العلاقة : مجموع محيطي الشكلين = $60 \ cm$

∴ محيط المربع + محيط الدائرة = 60



$4x + 2\pi r = 60] \div 2$

$2x + \pi r = 30 \Rightarrow \pi r = 30 - 2x$

$r = \frac{30-2x}{\pi}$ ……… (1)

الدالة : مساحة المربع + مساحة الدائرة

$A = x^2 + \pi r^2$ ………..(2)

$A = x^2 + \pi \left(\frac{30-2x}{\pi}\right)^2$ نعوض 1 في 2

$A = x^2 + \pi \left[\frac{900-120x+4x^2}{\pi^2}\right]$

$A = x^2 + \frac{1}{\pi}(900 - 120x + 4x^2)$

$\frac{dA}{dx} = 2x + \frac{1}{\pi}(-120 + 8x)$ نشتق بالنسبة إلى x

$\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 2x + \frac{1}{\pi}(-120 + 8x) = 0\ ] * \pi$

$2x\pi - 120 + 8x = 0\ ] \div 2 \Rightarrow x\pi - 60 + 4x = 0$

$x\pi + 4x = 60 \Rightarrow x(\pi + 4) = 60$

$x = \frac{60}{\pi+4}\ cm$ نعوض في (1)

$r = \frac{30-2\left(\frac{60}{4+\pi}\right)}{\pi} = \frac{30-\frac{120}{4+\pi}}{\pi} = \frac{\frac{120+30\pi-120}{4+\pi}}{\pi} = \frac{30\pi}{\pi(4+\pi)} = \frac{30}{4+\pi} cm$

$\therefore x = 2r$

$f''(x) = 2 + \frac{8}{\pi} > 0$

∴ الدالة تملك نهاية صغرى محلية.

مثال جد نقطة أو نقاط تنتمي للقطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$ بحيث تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(0,4)$

نفرض أن النقطة $p(x,y)$ أي نقطة $\in$ للمنحني $y^2 - x^2 = 3$ فتحقق معادلته.

$\therefore x^2 = y^2 - 3$ ……… (1) العلاقة

$s = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$ الدالة

$s = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} \Rightarrow s = \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16}$ ………..(2)

$s = \sqrt{y^2 - 3 + y^2 - 8y + 16}$ نعوض 1 في 2

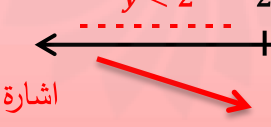
$s = \sqrt{2y^2 - 8y + 13} \Rightarrow s = (2y^2 - 8y + 13)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{ds}{dy} = \frac{1}{2}(2y^2 - 8y + 13)^{-\frac{1}{2}}\ (4y - 8)$ نشتق بالنسبة إلى y

$\frac{ds}{dy} = \frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}}$

$\frac{ds}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{4y-8}{2\sqrt{2y^2-8y+13}} = 0 \Rightarrow 4y - 8 = 0$

$4y = 8 \Rightarrow y = 2$



اشارة $\frac{ds}{dy}$

∴ توجد نهاية صغرى عند $y = 2$ ، جملة (أقرب ما يمكن) معناه ايجاد أصغر مسافة بين النقطتين

∴ نعوض $y = 2$ في 1 $x^2 = (2)^2 - 3 \Rightarrow x^2 = 4 - 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

∴ النقاط : $(1,2)$, $(-1,2)$

تمارين [6 – 3]

١– جد عددين موجبين مجموعهما 75 وحاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن.

نفرض العدد الأول x ، العدد الثاني y

العلاقة : مجموعهما 75

$\therefore x + y = 75 \Rightarrow x = 75 - y \ldots\ldots (1)$

الدالة: حاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر. $f(x) = xy^2 \ldots\ldots (2)$

نعوض (1) في (2) $f(x) = (75 - y)y^2$

$f(x) = 75y^2 - y^3$

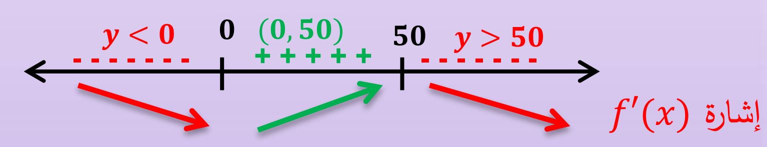
نشتق بالنسبة إلى y $f'(x) = 150y - 3y^2$

$150y - 3y^2 = 0\ ] \div 3 \Rightarrow 50y - y^2 = 0 \Rightarrow y(50 - y) = 0$

أما $y = 0$

أو $50 - y = 0 \Rightarrow y = 50$

إشارة $f'(x)$



$\therefore$ توجد نهاية صغرى محلية عند $y = 0$ تهمل ، توجد نهاية عظمى محلية عند $y = 50$

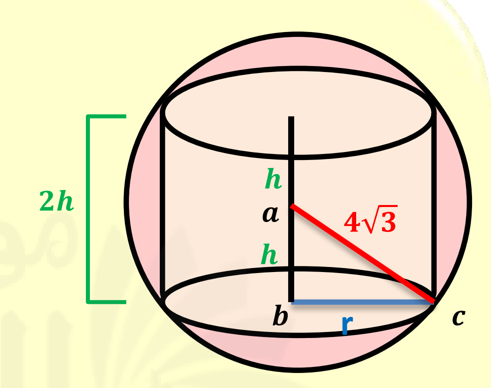
$\therefore y = 50$ العدد الأول

نعوض في 1 لايجاد العدد الثاني $x = 75 - 50 \Rightarrow x = 25$

٢– جد ارتفاع اكبر أسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كرة نصف قطرها $(4\sqrt{3}cm)$

نفرض نصف قطر قاعدة الأسطوانة r ، ارتفاع الأسطوانة $2h$ ، حجم الأسطوانة v

العلاقة: من مبرهنة فيثاغورس للمثلث abc



$(4\sqrt{3})^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 48 = h^2 + r^2$

$r^2 = 48 - h^2 \ldots\ldots (1)$

الدالة : هي حجم الأسطوانة $v = \pi r^2 h \ldots\ldots (2)$

نعوض 1 في 2 $v = \pi(48 - h^2)(2h)$

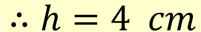
$v = 96\pi h - 2\pi h^3$

نشتق بالنسبة إلى h $\frac{dv}{dh} = 96\pi - 6\pi h^2$

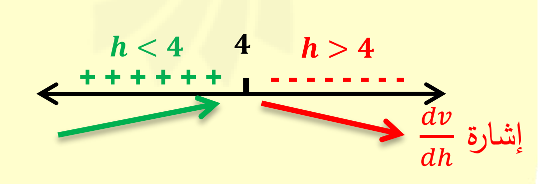
$96\pi - 6\pi h^2 = 0\ ] \div 6\pi$

$16 - h^2 = 0$

$h^2 = 16 \Rightarrow h = \mp 4$ ، $h = -4$ يهمل [كونها ارتفاع] ، $h = 4$



إشارة $\frac{dv}{dh}$



$\therefore$ توجد نهاية عظمى محلية عند $h = 4$

$\therefore h = 4\ cm$

$\therefore 2h = 2(4) = 8\ cm$ ارتفاع الأسطوانة

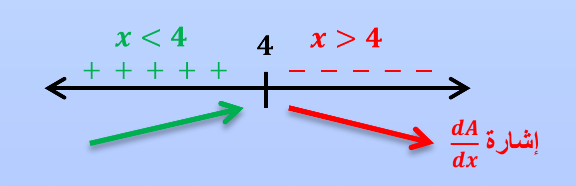
٣- جد بعدي أكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها $(4\sqrt{2}cm)$

نفرض أبعاد المستطيل $(x\,,2y\;\;cm)$

العلاقة: مبرهنة فيثاغورس للمثلث $a\;b\;c$

$$(4\sqrt{2})^2 = x^2 + y^2$$
$$32 = x^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 32 - x^2$$
$$y = \sqrt{32 - x^2} \;\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$A = x(2y)$$ الدالة : هي مساحة المستطيل
$$A = 2xy \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$A = 2x\sqrt{32 - x^2}$$ نعوض 1 في 2
$$A = 2\sqrt{x^2(32 - x^2)}$$ ($\because\; x > 0$ $\therefore$ ندخله داخل الجذر فيصبح x^2 وذلك لتوحيد الجذر)
$$A = 2\sqrt{32x^2 - x^4}$$
$$A = 2(32x^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{dA}{dx} = 2\left[\frac{1}{2}(32x^2 - x^4)^{-\frac{1}{2}}(64x - 4x^3)\right]$$ نشتق بالنسبة إلى x
$$\frac{dA}{dx} = \frac{64x - 4x^3}{\sqrt{32x^2 - x^4}}$$
$$\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{64x - 4x^3}{\sqrt{32x^2 - x^4}} = 0$$
$$\Rightarrow 64x - 4x^3 = 0\;]\; \div 4$$
$$16x - x^3 = 0 \Rightarrow x(16 - x^2) = 0$$
أما $x = 0$ يهمل

أو $16 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$



توجد نهاية عظمى عند $x = 4$

$\therefore x = 4\;\;cm$ البعد الأول نعوض في 1

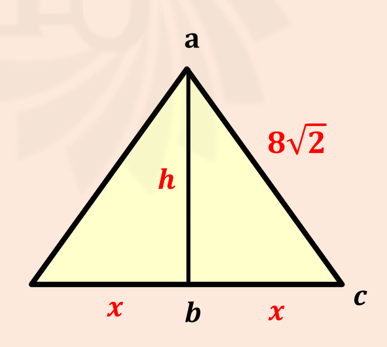
$$y = \sqrt{32 - (4)^2} = \sqrt{32 - 16} = \sqrt{16} = 4$$
$$\therefore 2y = 2(4) = 8\;\;cm$$ البعد الآخر

٤- جد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $8\sqrt{2}\;cm$

نفرض طول القاعدة $2x\;\;cm$ ، أرتفاع المثلث $h\;\;cm$

العلاقة من مبرهنة فيثاغورس للمثلث abc

$$(8\sqrt{2})^2 = h^2 + x^2$$
$$128 = h^2 + x^2$$
$$x^2 = 128 - h^2 \Rightarrow x = \sqrt{128 - h^2}\;\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
الدالة مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع
$$A = \frac{1}{2}(2x)(h)$$
$$A = xh\;\;\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$A = h\sqrt{128 - h^2}$$ نعوض 1 في 2
$$A = \sqrt{h^2(128 - h^2)}$$





$A=\sqrt{128h^2-h^4}$

$A=(128h^2-h^4)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dA}{dh}=\frac{1}{2}(128h^2-h^4)^{-\frac{1}{2}}(256h-4h^3)$

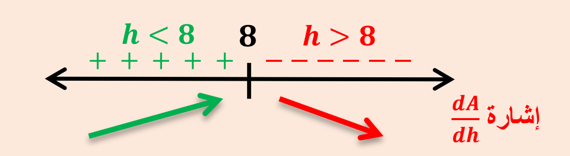
$\frac{dA}{dh}=\frac{256h-4h^3}{2\sqrt{128h^2-h^4}}$

$\frac{256h-4h^3}{2\sqrt{128h^2-h^4}}=0 \Rightarrow 256h-4h^3=0] \div 4$

$\Rightarrow 64h-h^3=0$

$h(64-h^2)=0 \Rightarrow h=0$ يهمل

$64-h^2=0 \Rightarrow h^2=64 \Rightarrow h=8$



$\because$ توجد نهاية عظمى عند $h=8$ اذن ارتفاع المثلث $=8\ cm$

$x=\sqrt{128-64}=\sqrt{64}=8$ نعوض في 1

$2x=2(8)=16cm$ طول قاعدة المثلث

$\therefore A=\frac{1}{2}(2x)(h)$ مساحة المثلث

$A=\frac{1}{2}(16)(8) \Longrightarrow A=64\ cm^2$

٥- جد أقل محيط ممكن للمستطيل الذي مساحته $(16\ cm^2)$

نفرض أبعاد المستطيل $x,y\ cm$ ، مساحة المستطيل A ، محيط المستطيل P

العلاقة : مساحة المستطيل

$A=xy$

$16=xy \Rightarrow y=\frac{16}{x}$ ……………(1)

x

y

الدالة : محيط المستطيل

$p=2(x+y)$ ……. (2)

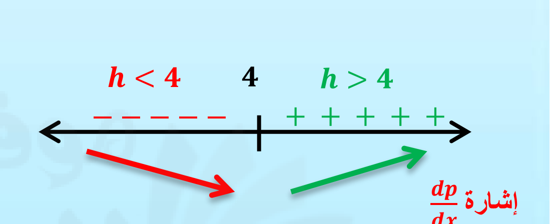
$P=2\left(x+\frac{16}{x}\right)$ نعوض (1) في (2)

$p=2(x+16x^{-1})$

$\frac{dp}{dx}=2(1-16x^{-2})$ نشتق بالنسبة إلى x

$2\left(1-\frac{16}{x^2}\right)=0\ ]\div 2$

$1-\frac{16}{x^2}=0 \Rightarrow \frac{16}{x^2}=1 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=4$



توجد نهاية صغرى محلية عند $x=4 \Longleftarrow x=4cm$ البعد الأول

$y=\frac{16}{4} \Rightarrow y=4\ cm$ نعوض في 1 لأيجاد البعد الثاني

$p=2(x+y) \Longrightarrow p=2(4+4) \Rightarrow P=16\ cm$ محيط المستطيل

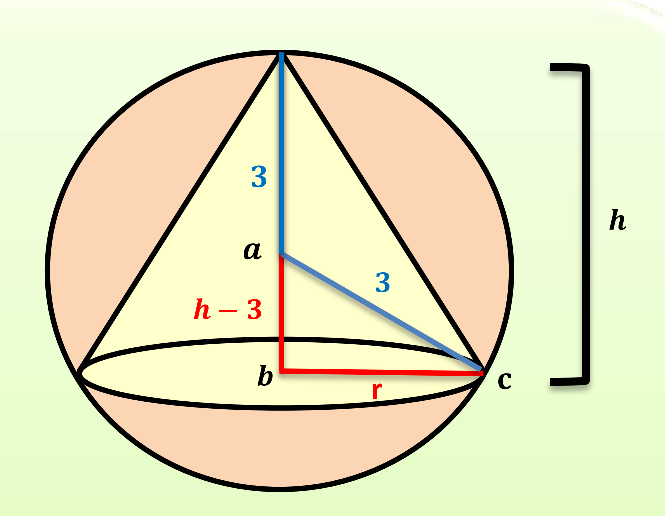
٦- جد حجم اكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها $3\ cm$

نفرض ارتفاع المخروط h ، نصف قطر قاعدة المخروط r

العلاقة: من مبرهنة فيثاغورس للمثلث abc

$(3)^2=r^2+(h-3)^2$

$\cancel{9}=r^2+h^2-6h+\cancel{9} \Longrightarrow r^2=6h-h^2$ ……….(1)



الدالة : حجم المخروط

$v = \frac{\pi}{3} h\, r^2 \dots\dots\dots (2)$

$v = \frac{\pi}{3} h(6h - h^2)$ نعوض (1) في (2)

$v = 2\pi h^2 - \frac{\pi}{3} h^3$

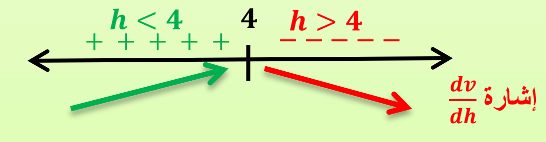
$\frac{dv}{dh} = 4\pi h - \pi h^2$ نشتق بالنسبة إلى h

$4\pi h - \pi h^2 = 0\ ] \div \pi$

$4h - h^2 = 0 \Rightarrow h(4-h) = 0$

أما $h = 0$ يهمل

أو $4 - h = 0 \Rightarrow h = 4$



$h = 4$ توجد نهاية عظمى محلية عند

$\therefore h = 4cm$ أرتفاع المخروط

$r^2 = 6(4) - (4)^2 \Rightarrow r^2 = 24 - 16$ نعوض في (1)

$r^2 = 8 \Rightarrow r = 2\sqrt{2}\ cm$ نصف قطر المخروط

نعوض $r^2 = 8$ و $h = 4$ في (2)

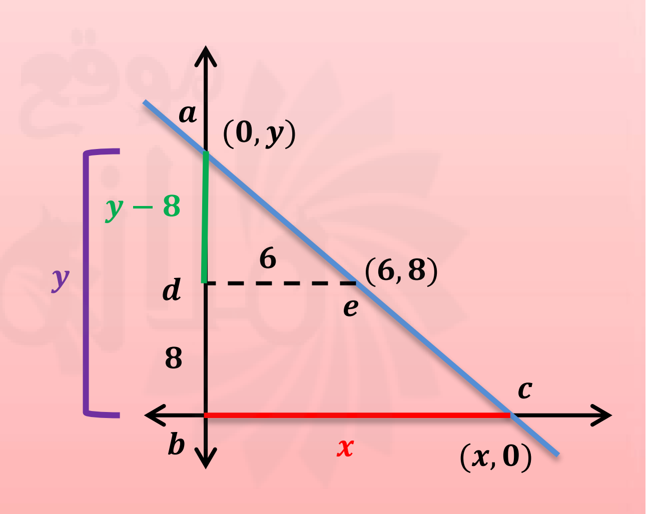
$v = \frac{\pi}{3}(4)(8) = \frac{32}{3}\pi\ \ cm^3$ أكبر حجم للمخروط

٧− جد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة $(6,8)$ والذي يصنع مع المحورين في الربع الأول أصغر مثلث

نفرض قاعدة المثلث x ، ارتفاع المثلث y

نفرض نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات $(x,0)$

نفرض نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات $(0,y)$



العلاقة: من تشابه المثلثين ade, abc

$\frac{de}{bc} = \frac{ad}{ab}$

$\frac{6}{x} = \frac{y-8}{y}$

$x(y-8) = 6y\ ] \div (y-8)$

$x = \frac{6y}{y-8} \dots\dots\dots\dots (1)$

الدالة : ∵ المطلوب أصغر مثلث ∴ الدالة هي مساحة المثلث

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

$A = \frac{1}{2} xy \dots\dots\dots (2)$

$A = \frac{1}{2}\left(\frac{6y}{y-8}\right) y$ نعوض 1 في 2

$A = \frac{3y^2}{y-8}$

$\frac{dA}{dy} = \frac{(y-8)(6y) - (3y^2)(1)}{(y-8)^2}$ نشتق بالنسبة إلى y

$\frac{dA}{dy} = \frac{6y^2-48y-3y^2}{(y-8)^2}$

$\frac{dA}{dy} = \frac{3y^2-48y}{(y-8)^2}$

$\frac{3y^2-48y}{(y-8)^2} = 0 \Rightarrow 3y^2 - 48y = 0] \div 3$

$y^2 - 16y = 0 \Longrightarrow y(y-16) = 0$

أما $y = 0$ يهمل

أو $y - 16 = 0 \Rightarrow y = 16$

$y < 16$ 16 $y > 16$

إشارة $\frac{dA}{dy}$: − − − − − | + + + + +

توجد نهاية صغرى عند $y = 16$ اذاً $y = 16\ cm$ ارتفاع المثلث نعوض في 1

طول قاعدة المثلث $x = \frac{6\,(16)}{16-8} = \frac{96}{8} = 12\ cm$

∴ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات $(12,0)$ ، نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات $(0,16)$

لايجاد معادلة المستقيم : نجد ميل المستقيم المحدد بالنقطتين $(12,0)$, $(0,16)$

ميل المستقيم $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{16-0}{0-12} = \frac{16}{-12} = -\frac{4}{3}$

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$

عند أية نقطة من النقطتين ، عند $(0,16)$

$y - 16 = -\frac{4}{3}(x - 0)$

$y - 16 = -\frac{4}{3}\,x\,] * 3$

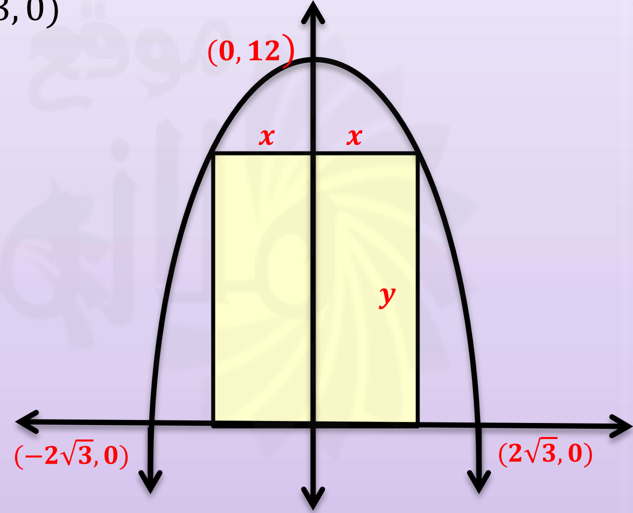
معادلة المستقيم $3y - 48 = -4x \Longrightarrow 4x + 3y - 48 = 0$

٨- جد بعدي أكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بالدالة $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات، رأسان من رؤوسه على المنحني والرأسان الآخران على محور السينات ثم جد محيطه.

لرسم المنحني نجد نقاط التقاطع مع المحورين : أ) مع محور الصادات $x = 0 \Rightarrow y = 12 \Longrightarrow (0,12)$

ب) مع محور السينات $y = 0 \Rightarrow 12 - x^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \mp 2\sqrt{3} \Longrightarrow (2\sqrt{3},0), (-2\sqrt{3},0)$



نفرض أبعاد المستطيل $2x, y\,cm$ ، ومساحة المستطيل A

العلاقة : من صيغة السؤال $y = 12 - x^2 \ldots\ldots(1)$

الدالة : مساحة المستطيل = الطول × العرض

$A = 2xy \ldots\ldots(2)$ نعوض(1) في (2)

$A = 2x(12 - x^2)$

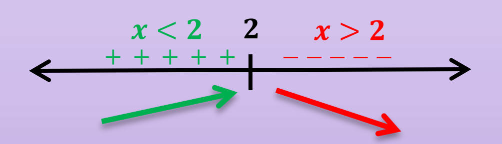
$A = 24x - 2x^3$ نشتق بالنسبة إلى x

$A' = 24 - 6x^2$

$24 - 6x^2 = 0\ ] \div 6$

$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

توجد نهاية عظمى محلية عند $x = 2$



البعد الأول $\therefore 2x = 2(2) = 4\ cm$

نعوض $x = 2$ في (1)

البعد الآخر $y = 12 - (2)^2 \Rightarrow y = 12 - 4 \Rightarrow y = 8cm$

∴ محيط المستطيل = ٢ x (الطول+ العرض)

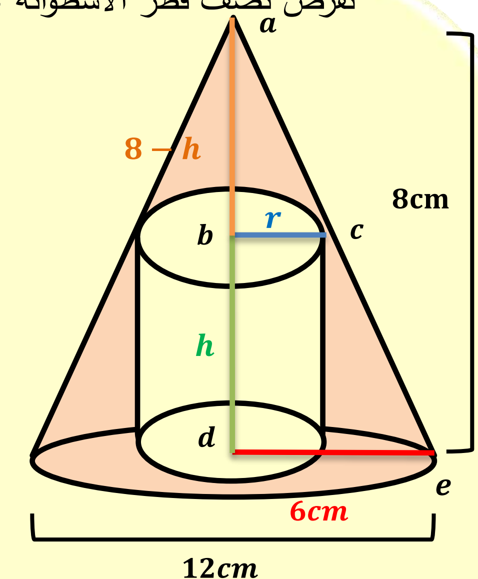
$p = 2(2x + y)$

$p = 2(4 + 8)$

$p = 2(12) \Rightarrow P = 24\ \ cm$

٩- جد أبعاد أكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه $(8cm)$ وطول قطر قاعدته $(12cm)$

نفرض نصف قطر الأسطوانة $r =$ ، ارتفاع الأسطوانة $h =$ ، حجم الأسطوانة $v =$



العلاقة : من تشابه المثلثين ade, abc

$$\frac{bc}{de} = \frac{ab}{ad}$$

∵ قطر الأسطوانة $12cm$

∴ نصف قطرها $= \frac{12}{2} = 6cm$

$$\therefore \frac{r}{6} = \frac{8-h}{8}$$

$48 - 6h = 8r \Rightarrow 6h = 48 - 8r$

$\Rightarrow h = \frac{48-8r}{6} \ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$

الدالة : حجم الأسطوانة

$v = \pi r^2 h \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

$v = \pi r^2 \left(\frac{48-8r}{6}\right)$ نعوض (1) في (2)

$v = \frac{\pi}{6}(48r^2 - 8r^3)$

$\frac{dv}{dr} = \frac{\pi}{6}(96r - 24r^2)$ نشتق بالنسبة r

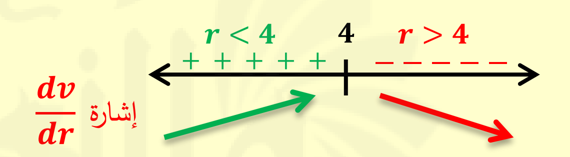
$\frac{\pi}{6}(96r - 24r^2) = 0\ ] \ \div \frac{\pi}{6}$

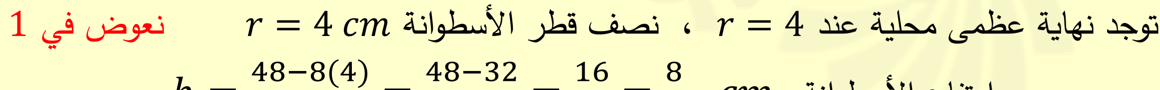
$96r - 24\, r^2 = 0] \div 24$

$4r - r^2 = 0$

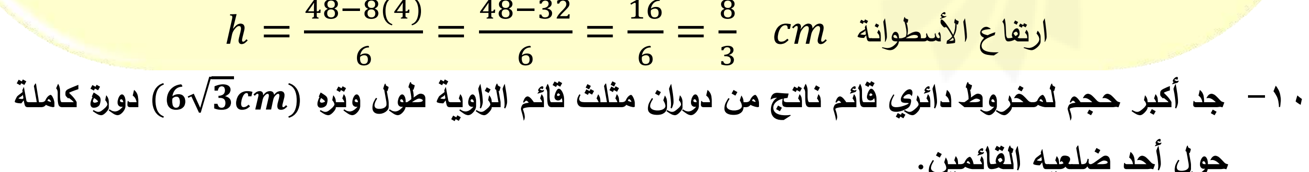
$r(4 - r) = 0 \Rightarrow$ أما $r = 0$ تهمل

أو $4 - r = 0 \Rightarrow r = 4$




توجد نهاية عظمى محلية عند $r = 4$ ، نصف قطر الأسطوانة $r = 4\ cm$ نعوض في 1

ارتفاع الأسطوانة $h = \frac{48-8(4)}{6} = \frac{48-32}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}\ \ cm$


١٠- جد أكبر حجم لمخروط دائري قائم ناتج من دوران مثلث قائم الزاوية طول وتره $(6\sqrt{3}cm)$ دورة كاملة حول أحد ضلعيه القائمين.

نفرض نصف قطر المخروط r ، ارتفاع المخروط h ، حجم المخروط v

العلاقة : من مبرهنة فيثاغورس للمثلث abc

$(6\sqrt{3})^2 = h^2 + r^2$

$108 = h^2 + r^2$

$r^2 = 108 - h^2 \; \dots\dots\dots(1)$

الدالة: حجم المخروط

$v = \frac{\pi}{3} r^2 h \; \dots\dots(2)$

$v = \frac{\pi}{3}(108 - h^2)h$ نعوض 1 في 2

$v = \frac{\pi}{3}(108h - h^3)$

$\frac{dv}{dh} = \frac{\pi}{3}(108 - 3h^2)$ نشتق بالنسبة إلى h

$\frac{\pi}{3}(108 - 3h^2) = 0 \,] \div \frac{\pi}{3}$

$108 - 3h^2 = 0 \,] \div 3$

$36 - h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 36 \Rightarrow h = 6$

a, h, $6\sqrt{3}cm$, r, b, c

$h < 6$ 6 $h > 6$

+ + + + + | − − − − − −

إشارة $\frac{dv}{dh}$

$\therefore h = 6$ توجد نهاية عظمى عند $\Longrightarrow h = 6cm$ أرتفاع المخروط نعوض في 1

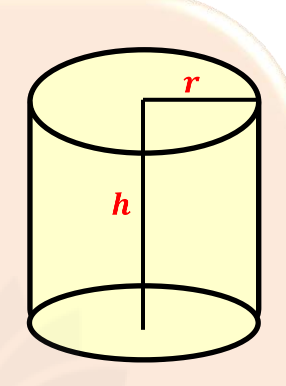
$r^2 = 108 - (6)^2 \Rightarrow r^2 = 108 - 36 \Longrightarrow r^2 = 72 \Longrightarrow r = 6\sqrt{2}cm$ نصف قطر المخروط

$v = \frac{\pi}{3}(72)(6)$ نعوض قيمتي r^2, h في 2 لإيجاد اكبر حجم للمخروط

$v = 144\,\pi \;\; cm^3$ أكبر حجم للمخروط

١١ – علبة اسطوانية الشكل مفتوحة من الأعلى سعتها $(125\pi \;\; cm^3)$ جد أبعادها عندما تكون مساحة المعدن المستخدم في صنعها أقل ما يمكن.

نفرض ارتفاع الأسطوانة h ، نصف قطر الأسطوانة r



$\because$ سعة الأسطوانة معلومة $\therefore$ العلاقة هي حجم الأسطوانة [السعة هي الحجم]

$v = \pi\, r^2 h$

$125\,\pi = \pi\, r^2 h \,] \div \pi$

$125 = r^2 h$

$h = \frac{125}{r^2} \; \dots\dots\dots(1)$

الدالة $\because$ ذكر في السؤال مساحة المعدن المستخدم

$\therefore$ نستخدم قانون المساحة الكلية للأسطوانة لكن بقاعدة واحدة لأن الأسطوانة بدون غطاء.

$\therefore$ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة قاعدة واحدة

= (محيط القاعدة × الارتفاع) + مساحة الدائرة.

$\therefore \;\; A = 2\pi\, rh + \pi\, r^2 \; \dots\dots\dots(2)$

$A = 2\pi r\left(\frac{125}{r^2}\right) + \pi r^2$ نعوض 1 في 2

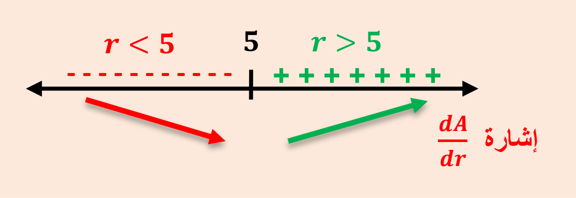
$A = \frac{250\,\pi}{r} + \pi r^2$

$A = 250\,\pi\, r^{-1} + \pi\, r^2$

$\frac{dA}{dr} = -250\pi r^{-2} + 2\pi r$ نشتق بالنسبة إلى r

$\frac{-250\pi}{r^2} + 2\pi r = 0 \,] * r^2$

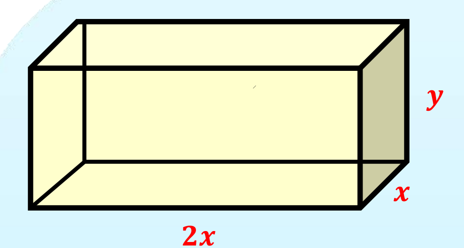
$-250\,\pi + 2\pi\, r^3 = 0\,] \div 2\pi$
$-125 + r^3 = 0 \Rightarrow r^3 = 125 \Rightarrow \quad r = 5$
∴ توجد نهاية صغرى محلية عند $r = 5$
∴ نعوض في (1) $\quad r = 5cm$ نصف قطر الأسطوانة
$h = \frac{125}{25} \quad \Rightarrow h = 5cm$ ارتفاع الأسطوانة



١٢ – خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فإذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعته $(108m^2)$ جد أبعاد الخزان لكي يكون حجمه أكبر ما يمكن علماً ان الخزان ذو غطاء كامل.

نفرض عرض قاعدة الخزان $x\ m$ ، طول قاعدة الخزان $2x\ m$

ارتفاع الخزان $y\ m$



∵ مساحة المعدن المستخدمة في صنع الخزان معلومة

∴ العلاقة هي قانون المساحة الكلية للخزان.

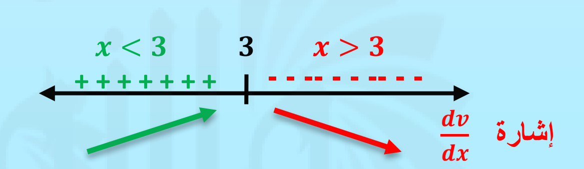
المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

= محيط القاعدة × الارتفاع + ٢ × (الطول × العرض)

$\therefore A = 2(2x + x) * y + 2\,(2x * x)$
$108 = 2y\,(3x) + 4x^2\,] \div 2$
$54 = 3x\,y + 2x^2 \Longrightarrow 3x\,y = 54 - 2x^2$
$y = \frac{54-2x^2}{3x} \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$

الدالة : حجم الخزان = مساحة القاعدة × الارتفاع

$v = (2x)(x)(y)$
$v = 2x^2 y \ \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$
$v = 2x^2 \left(\frac{54-2x^2}{3x}\right)$ نعوض (1) في (2)
$v = \frac{2}{3}(54x - 2x^3)$
$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{3}(54 - 6x^2)$ نشتق بالنسبة إلى x
$\frac{2}{3}(54 - 6x^2) = 0\,] \div \frac{2}{3}$
$54 - 6x^2 = 0\,] \div 6$
$9 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$



توجد نهاية عظمى عند $x = 3$

عرض قاعدة الخزان $x = 3\ m$

طول قاعدة الخزان $2x = 2(3) = 6\ m$

نعوض $x = 3$ في 1

$y = \frac{54-2(3)^2}{3(3)} = \frac{54-18}{9} = \frac{36}{9} = 4\ m$ ارتفاع الخزان

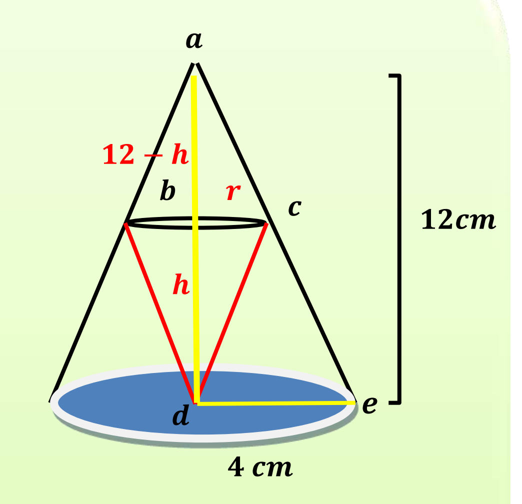


أسئلة إثرائية

س / مخروط قائم ارتفاعه $(12cm)$ ونصف قطر قاعدته $(4cm)$ بداخله مخروط دائري يرتكز رأسه في مركز قاعدة المخروط الأصلي جد أبعاد المخروط الداخلي بحيث يكون حجمه أكبر ما يمكن.

نفرض نصف قاعدة المخروط الداخلي r ، وارتفاعه h ، وحجمه v

العلاقة : من تشابه المثلثين $ade\ ,\ abc$



$$\frac{bc}{de}=\frac{ab}{ad}\Rightarrow\frac{r}{4}=\frac{12-h}{12}$$

$$48-4h=12\,r\Rightarrow[\,4h=48-12r\,]\div 4$$

$$h=12-3r\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

الدالة: حجم المخروط الداخلي

$$v=\frac{\pi}{3}r^2h\ \ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

$$v=\frac{\pi}{3}r^2(12-3r)$$ نعوض 1 في 2

$$v=4\,\pi\,r^2-\pi\,r^3$$

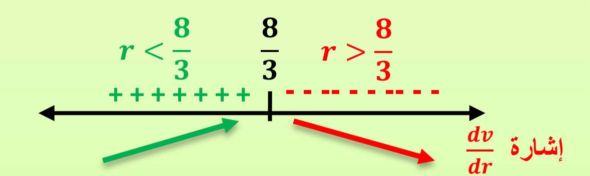
$$\frac{dv}{dr}=8\,\pi\,r-3\pi\,r^2$$ نشتق بالنسبة إلى r

$$8\pi\,r-3\pi\,r^2=0\,]\div\pi$$

$$8r-3r^2=0$$

$$r(8-3r)=0$$

أما $r=0$ يهمل أو $8-3r=0\Rightarrow 3r=8\Rightarrow r=\frac{8}{3}$



توجد نهاية عظمى محلية عند $r=\frac{8}{3}\Longleftarrow r=\frac{8}{3}\ cm$ نصف قطر المخروط نعوض في 1

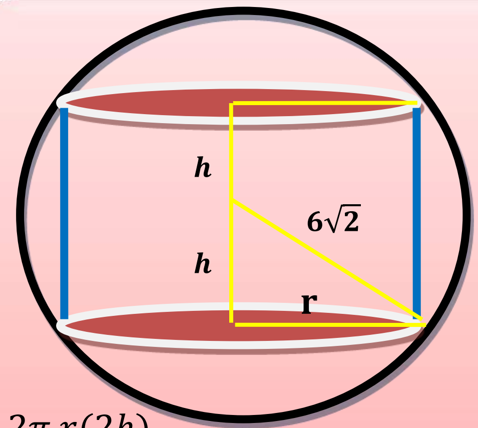
ارتفاع المخروط الداخلي $h=12-3\left(\frac{8}{3}\right)\Rightarrow h=12-8\Rightarrow h=4\ \ cm$



س/ جد أبعاد اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية أكبر ما يمكن موضوعة داخل كرة نصف قطرها $(6\sqrt{2}cm)$

نفرض نصف قطر قاعدة الأسطوانة r ، ارتفاع الأسطوانة $2h$

العلاقة : من قانون فيثاغورس



$$\left(6\sqrt{2}\right)^2=h^2+r^2$$

$$72=h^2+r^2$$

$$h^2=72-r^2\Rightarrow h=\sqrt{72-r^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

الدالة : المساحة الجانبية للأسطوانة.

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع.

$$A=2\pi\,r(2h)$$

$$A=4\pi\,rh\ \ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

$$A=4\pi\,r\sqrt{72-r^2}$$ نعوض 1 في 2

$$A=4\pi\sqrt{r^2(72-r^2)}$$

$$A=4\pi\sqrt{72r^2-r^4}$$



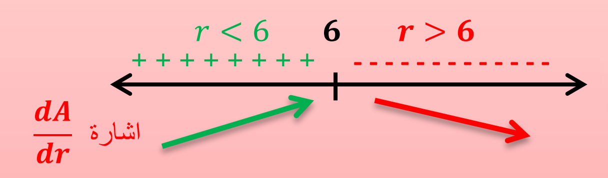
$A = 4\pi\,(72r^2 - r^4)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dA}{dr} = 4\pi\left[\frac{1}{2}(72\,r^2 - r^4)^{-\frac{1}{2}}\,(144\,r - 4\,r^3)\right]$ نشتق بالنسبة إلى r

$\frac{dA}{dr} = \frac{2\pi\,(144-4r^3)}{\sqrt{72\,r^2 - r^4}} \Longrightarrow \frac{2\pi(144-4r^3)}{\sqrt{72r^2-r^4}} = 0 \Rightarrow 2\pi\,(144 - 4r^3) = 0\,] \div 2\pi$

$144\,r - 4r^3 = 0 \Rightarrow r(144 - 4r^2) = 0$

أما $r = 0$ يهمل أو $144 - 4r^2 = 0\,] \div 4 \Rightarrow 36 - r^2 = 0 \Rightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$



توجد نهاية عظمى محلية عند $r = 6\,cm \Longleftarrow r = 6$ نصف قطر قاعدة الأسطوانة نعوض في (1)

$h = \sqrt{72 - (6)^2} = \sqrt{72 - 36} = \sqrt{36} = 6$

$\therefore\ 2h = 2(6) = 12\ cm$ ارتفاع الأسطوانة

س/ لتكن $y^2 = 8x$ جد نقطة $\in$ للمنحني وتكون أقرب ما يكون إلى النقطة $(6,0)$

نفرض النقطة التي تنتمي للمنحني هي (x,y)

$\therefore\ s = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$

$s = \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 0)^2}$

$s = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + y^2}\ \dots\dots\dots(1)$ الدالة

$\because\ y^2 = 8x\ \dots\dots\dots\dots(2)$ العلاقة

$s = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + 8x}$ $\therefore$ نعوض 2 في 1

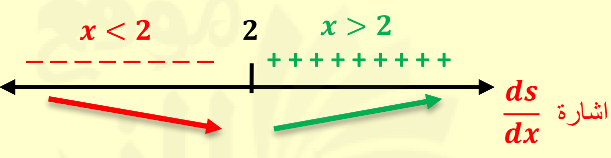
$s = \sqrt{x^2 - 4x + 36}$

$s = (x^2 - 4x + 36)^{\frac{1}{2}}$ نشتق بالنسبة إلى x

$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 36)^{-\frac{1}{2}}\,(2x - 4)$

$\frac{ds}{dx} = \frac{2(x-2)}{2\sqrt{x^2-4x+36}}$

$\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+36}} = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$



$\therefore$ توجد نهاية صغرى محلية عند $x = 2$ $\therefore$ نعوض $x = 2$ في 2

$y^2 = 8(2) \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \mp 4$

النقاط هي $\{(2,-4)(2,4)\}$

ملزمة الأساس في الرياضيات

تغنيك عن المدرس الخصوصي لما فيها من شرح وافي وملاحظات وافرة مع حلول جميع الأمثلة والتمارين واسئلة التمارين العامة مع حلول الأسئلة الوزارية والاثرائية لكل موضوع

اعداد وتصميم وتنضيد الست غيداء الشمري 2019